4. TÕENÄOSUSTEOORIA ALUSED

Katse ja sündmus

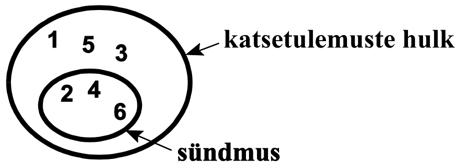
Matemaatika haru, mis uurib juhuslike nähtuste üldisi seaduspärasusi, nimetatakse **tõenäosus-teooriaks**. Satistika tegeleb paljude sündmuste tõenäosusega, tõenäosusteooria üksiku sündmuse tõenäosusega.

Tõenäosusteoorias on **katse** (*experiment*) protsess, mille käigus toimub teatud juhuslik valik etteantud **katsetulemuste** hulgast. Katse on suvaline arv korratav. Katsetulemuste kohta eeldatakse, et

- katsel on lõplik arv võimalikke tulemusi;
- katse teostamisel esineb üks ja ainult üks katsetulemus;
- katsetulemused on **võrdvõimalikud**, st et neil on kõigil ühesugune võimalus vastava katse tulemusena esineda.

Sündmus on teatud katsetulemuste hulk. Sündmuses sisalduvad katsetulemused on vastava sündmuse jaoks soodsad.

NÄIDE 4.1. Katsetulemus ja sündmus
Täringu viskamisel on võimalikeks katsetulemusteks 1; 2; 3; 4; 5 ja 6.
Sündmuseks võib olla paarisarvulise tulemuse saamine.



Joonis 8 Sündmus "paarisarvuline tulemus"

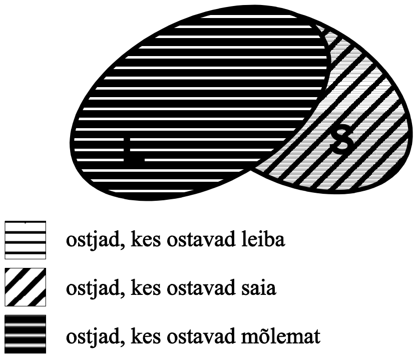
Katse	Sündmus
Mündi vise	1. Tuleb kull 2. Tuleb kiri
Kaardi võtmine pakist	1. Tuleb risti 2. Tuleb ruutu 3. Tuleb punane mast 4. Tuleb kümme
Aktsia hinna muutus	1. Aktsia hind tõuseb 2. Aktsia hind langeb 3. Aktsia hind ei muutu
Juhuslikult väljavalitud 20 kliendi küsitlus teenindamisega rahulolu kohta.	1. 17 klienti on rahul. 2. 3 klienti ei ole rahul. 3. 15 klienti on rahul. 4. Üle 15 kliendi oli rahul
Kuu keskmise käibe leidmine	1. Kuu keskmine käive on vahemikus 50 000 - 55 000 krooni.

Sündmuseid tähistatakse tavaliselt suurte tähtedega: A, B, C, ...

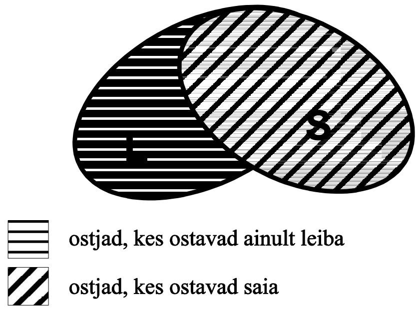
Kindel sündmus on sündmus, mis antud katse korral toimub kindlasti. Kindla sündmuse hulka kuuluvad kõik antud katse võimalikud tulemused. Tähiseks on Ω.
Võimatu sündmus on sündmus, mis antud katse korral ei saa kunagi toimuda. Võimatu sündmuse katsetulemuste hulk on tühi hulk. Tähiseks on $\varnothing$.
Juhuslik sündmus on sündmus, mis antud katse korral võib toimuda või mitte toimuda.

Sündmustega võib teha tehteid, mille abil saadakse uusi sündmusi. Need tehted langevad sisuliselt kokku tehetega, mis tehakse vastavate katsetulemuste hulkadega.

NÄIDE 4.2. Tähistame ostja poolt leiva ostmist tähega L ja saia ostmist tähega S. Ostja võib osta kas ainult leiba, ainult saia või mõlemat. Need sündmused ei välista teineteist. Sündmus "ostja ostab pagaritooteid" on siis nende kahe sündmuse summa. Sündmus "ostja ostab nii leiba kui saia" on aga nende sündmuste korrutis (joonis 9).



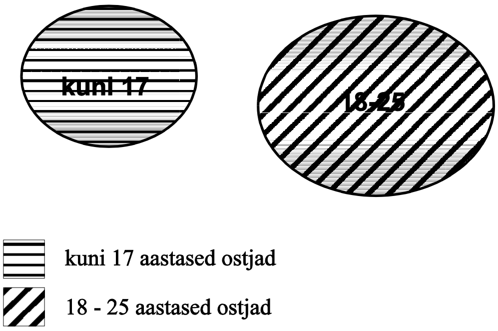
Joonis 9 Sündmuste summa ja korrutis.



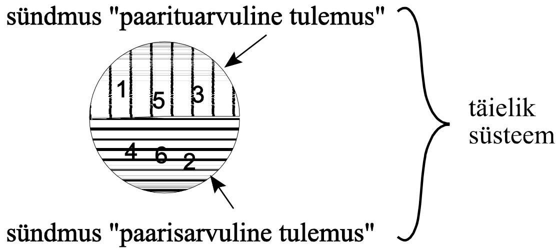
Joonis 10 Sündmuste vahe.

Sündmus "ostja ostab leiba, aga ei osta saia", on sündmuste vahe (joonis 10).

Kahe **sündmuse summaks** nimetatakse sündmust *C* , milles toimub kas sündmus *A* või sündmus *B* või mõlemad koos: $\boldsymbol{C = A \cup B}$.
Kahe sündmuse *A* ja *B* **korrutiseks** nimetatakse sündmust *C*, mille korral esineb nii sündmus *A* kui ka sündmus *B* : $\boldsymbol{C = A \cap B}$.
Kahe sündmuse *A* ja *B* **vaheks** nimetatakse sündmust *C*, mille korral esineb nii sündmus *A* kuid ei esine sündmust *B* : $\boldsymbol{C = A \setminus B}$.



Joonis 11 Teineteist välistavad sündmused



Joonis 12 Täelik süsteem

Juhuslikud sündmused on üksteist **välistavad**, kui nad ei saa korraga toimuda (joonis 11).
Katsetulemused on alati üksteist välistavad. Kui sündmused A ja B on üksteist välistavad, siis nende korrutis on võimatu sündmus $A \cap B = \varnothing$.
Juhuslikud sündmused on üksteist **mittevälistavad**, kui nad saavad toimuda korraga.
Sündmused moodustavad **täieliku süsteemi**, kui toimub vähemalt üks neist (joonis 12).
Sündmuse *A* **vastandsündmuseks** $\bar{A}$ nimetatakse sündmust, mis seisneb sündmuse *A* mittetoimumises. Vastandsündmused on üksteist välistavad ja moodustavad täieliku süsteemi.

Tõenäosus

Ühe ja sama katse tulemuste põhjal määratletud sündmustel võib olla erinev võimalikkus. Sündmusel, mille soodsate katsetulemuste hulk on suurem, on rohkem võimalusi toimuda. Seda võimalikkust väljendab sündmuse tõenäosus.
Juhuslikud sündmused on **võrdvõimalikud**, kui ühel neist pole rohkem võimalusi esiletulekuks kui teisel. Võrdvõimalikel sündmustel on võrdne arv soodsaid katsetulemusi.

Tõenäosuse arvväärtuse leidmiseks on kolm meetodit

- teoreetiline;
- statistiline;
- subjektiivne.

Klassikaline ehk teoreetiline tõenäosus.
Sündmuse A tõenäosus on sündmuse jaoks soodsate katsetulemuste arvu m ja kõigi katsetulemuste arvu n suhe

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

KATSE	SÜNDMUS	SOODSATE TULEMUSTE ARV m	KÕIGI TULEMUSTE ARV n	TÕENÄOSUS $\frac{m}{n}$
Mündi vise	Tuleb "kull"	1	2	$\frac{1}{2}$
Täringu vise	Tulemus on suurem kui 4	2	6	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
Kaardi võtmine 52 lehega pakist	Mast on "ruutu"			
Kaardi võtmine 52 lehega pakist	Kaart on "äss"			
Laps sünnib...	...nädalavahetusel			
Detsembris sündinud inimesel...	...on sünnipäev *peale* jõululaupäeva			
Homne aktsia hinna muutus	Aktsia hind tõuseb 5%			

Tõenäosuse definitsioonist järelduvad järgmised **tõenäosuse omadused**:

- Suvalise sündmuse A toimumise tõenäosus võib olla vahemikus nullist üheni, $0 \le p(A) \le 1$.
- Kindla sündmuse Ω tõenäosus on 1, $p(\Omega) = 1$;
- Võimatu sündmuse $\varnothing$ tõenäosus on 0; $p(\varnothing) = 0$.
- Täieliku süsteemi moodustavate sündmuste tõenäosuste summa on 1, $\sum p = 1$.
- Sündmuse A vastandsündmuse $\overline{A}$ toimumise tõenäosus on $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Kui pole võimalik leida klassikalist tõenäosust, kasutatakse statistilist (**empiirilist**) tõenäosust.

NÄIDE 4.3. Teoreetiliselt pole võimalik leida nisuterade idanemise tõenäosust. Selle määramiseks pannakse saagist võetud terade hulgast idanema 1000 tera. Kui neist idaneb 940, loetakse põllusaagi idanevuseks $\frac{940}{1000} = 0{,}94 = 94\%$.

NÄIDE 4.4. Kui 200-st ostjast 25 ostsid Fantat, siis Fanta ostmise tõenäosus on $\frac{25}{200} = 0{,}125 = 12{,}5\%$.

Kui n on katsete arv ja m sündmuse A esinemissagedus nendes katsetes, siis sündmuse A toimumise suhteline sagedus ehk **statistiline tõenäosus**

$$p*(A)=\frac{m}{n}$$

Katsete arvu n suurenemisel läheneb statistiline tõenäosus klassikalisele tõenäosusele: $p*(A)\to p(A)$.

NÄIDE 4.5. Kui suure tõenäosusega võidab järgmise mängu korvpallimeeskond "Kärmed"? Seda pole võimalik leida ei teoreetiliselt ega ka katseliselt.

Tõenäosuse **subjektiivset** hindamist kasutatakse, kui pole võimalik leida teoreetilist tõenäosust ega saa läbi viia ka katseid statistilise tõenäosuse leidmiseks. Subjektiivsel hindamisel kasutatakse olemasolevat informatsiooni ja intuitsiooni. Erinevad inimesed hindavad ühe ja sama sündmuse tõenäosust erinevalt.

ÜLESANDED

4.1 Olgu katseks kaardi tõmbamine 52 lehelisest kaardipakist.
- a) Mitu võimalikku katsetulemust on?
- b) Milline meetod (teoreetiline, statistiline või subjektiivne) on antud katse juures sobiv sündmuse tõenäosuse leidmiseks?
- c) Kui suur on iga konkreetse kaardi tõmbamise tõenäosus?
- d) Kui suur on tõenäosus, et tõmmatakse välja suvaline kaart?

4.2 Loteriipiletite arv on 1000. Nende hulgas on üks 100-kroonine võit, viis 50-kroonist võitu, kakskümmend 25-kroonist võitu ja viiskümmend 10-kroonist võitu. Leida tõenäosus, et ühe pileti ostmisel võib võita
- a) vähemalt 25 krooni;
- b) saada mingi võit.

4.3 Vaasis on 12 valget, 15 punast ja 9 kollast roosi. Leida tõenäosus, et pimedas ruumis juhuslikult valitud roos pole kollane.

4.4 1000-st firmast on kolme aasta jooksul pankrotti läinud 45. Kui suur on tõenäosus, et teie loodud firma läheb pankrotti?

4.5 Juhuslikult välja valitud 100-st ostjast 32 ei ostnud midagi, 45 ostjat tegid kuni 50-kroonise ostu, 15 ostjat 50-500 kroonise ostu ja 8 ostsid kaupa rohkem kui 500 krooni eest. Leida, kui suur on tõenäosus, et ostja
- a) ei osta midagi;
- b) ostab kaupa kuni 500 krooni eest.

4.6 Katsel on kolm võimalikku tulemust T_1, T_2 ja T_3. Katset korraldati 50 korda, kusjuures tulemus T_1 esines 20 korda, tulemus T_2 esines 13 korda ja tulemus T_3 esines 17 korda. Kui suur on iga tulemuse tõenäosus? Millist meetodit tõenäosuse hindamisel kasutasid?

4.7 Firmas on 100 töötajat, kellest 40 on mehed. Küsitluse tulemusel selgus, et oma tööga on rahul 60 töötajat, kusjuures nendest 30 olid naised. Leida tõenäosus, et
- a) mees ei ole tööga rahul ;
- b) naine on tööga rahul.

VASTUSED

4.1 a)52,; b)teoreetiline; c) $\frac{1}{52}$; d) 1 **4.2** a) 0,026; b) 0,076. **4.3** 0,75 **4.4** 0,045. **4.5** a) 0,32; b) 0,6. **4.6** $P(T_1)=0{,}4$; $P(T_2)=0{,}26$; $P(T_3)=0{,}34$; statistiline. **4.7** a) 0,25; b) 0,5.

Kombinatoorika.

Mõned probleemid.

Üheksast inimesest tuleb moodustada kolmeliikmelised grupid. Mitu erinevat gruppi on võimalik moodustada? Kui aga igas grupis on inimestel alluvusvahekord (ühele allub teine ja teisele kolmas), mitu erinevat gruppi siis saab?
Mitu erinevat 4-kohalist PIN koodi on võimalik moodustada (kasutatakse vaid numbreid)?
Mitu erinevat võimalust on kahe detaili valikuks 10-st?

Tõenäosuse teoreetilisel leidmisel on tihti vaja leida kõigi katsetulemuste arv ja soodsate katsetulemuste arv. Nende arvude leidmisel aitab meid matemaatika osa kombinatoorika.

Kombinatoorika tegeleb üldiste meetodite ja valemite loomisega niisuguste ülesannete lahendamiseks, kus tuleb leida erinevate võimaluste arv mingis mõttes eristatavate hulkade moodustamiseks. Tuleb vastata küsimusele “kui palju?” või “mitmel viisil?”.

Ühenditeks nimetatakse mingitest elementidest moodustatud kogumeid, mis erinevad üksteisest
1) elementide endi;
2) elementide järjestuse;
3) elementide arvu poolest.

Permutatsioonideks *n* erinevast elemendist nimetatakse selliseid *n* elemendist koosnevaid ühendeid, mis erinevad üksteisest elementide järjestuse poolest.
Näiteks kolmest tähest a, b ja c saab moodustada 6 erinevat permutatsiooni:
abc acb bac bca cab cba

Kõikvõimalike permutatsioonide arvu *n* elemendist on võimalik arvutada järgmise valemiga:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

Suurust $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n = n!$ nimetatakse arvu *n* **faktoriaaliks**.
Programmis *MS Excel* võib faktoriaali leidmiseks kasutada funktsiooni **FACT**.

Variatsioonideks n elemendist m kaupa nimetatakse selliseid ühendeid, milledest igaüks sisaldab *m* elementi, mis on võetud *n* erineva elemendi hulgast ja mis erinevad üksteisest kas elementide endi või nende järjestuse poolest.
Näiteks kui antud elementideks on tähed a, b, c, d ja e (n=5), siis kolmetäheliste (m=3) “sõnade” moodustamiseks on 60 erinevat võimalust:

abc	abd	abe	acd	ace	ade	bcd	bce	bde	cde
acb	adb	aeb	adc	aec	aed	bdc	bec	bed	ced
bca	bda	bae	cad	cae	dae	cbd	cbe	dbe	dce
bac	bad	bea	cda	cea	dea	cbd	ceb	deb	dec
cab	dab	eab	dac	eac	ead	dbc	ebc	ebd	ecd
cba	dba	eba	dca	eca	eda	dcb	ecb	edb	edc

Variatsioonide arvu võib leida valemist

$$V_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Programmis *MS Excel* leiab variatsioonide arvu funktsioon **PERMUT**.

Variatsioonid *n* elemendist *n* kaupa on permutatsioonid, $V_n^n = P_n$.

Kombinatsioonideks n elemendist m kaupa nimetatakse selliseid ühendeid, millest igaüks sisaldab m elementi, mis on võetud antud n erineva elemendi hulgast ja mis erinevad üksteisest vähemalt ühe elemendi poolest. Kombinatsioonide korral järjestus pole oluline, st. erinevateks loetakse need kombinatsioonid, mis koosnevad erinevatest elementidest.

$$C_n^m = \frac{V_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Programmis *MS Excel* leiab kombinatsioonide arvu funktsioon **COMBIN**.

Seni vaadeldud ühendeis olid kõik n elementi erinevad ja iga element võis ühendis esineda ülimalt üks kord.
Esinegu meil n elemendi hulgas α korda element a, β korda element b jne., λ korda element l, kusjuures $\alpha + \beta + ... + \lambda = n$. Neist n elemendist moodustatud permutatsioone nimetatakse **kordumistega permutatsioonideks**. Kordumistega permutatsioonide arv

$$P_{n(\alpha,\beta,...,\lambda)} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,...\,\lambda!}$$

Kordumistega variatsioonide arv

$$V_n^k = n^k$$

ÜLESANDED
4.8 Ühe päeva tunniplaanis on 5 tundi. Mitu erinevat tunniplaani saab koostada 10 õppeainest, kui igale õppeainele on ette nähtud üks tund päevas?
4.9 Mitmel erineval viisil saab 6 erinevat kirja panna kuute erinevate aadressidega ümbrikusse, nii et igas ümbrikus oleks üks kiri? Kui suur on tõenäosus, et kõik kirjad satuvad õigetesse ümbrikesse?
4.10 12 kandidaadist moodustatakse üks 3-liikmeline grupp ja kõikidel kandidaatidel on ühesugune võimalus pääseda sellesse gruppi. Kui suur on tõenäosus, et kandidaat *X* pääseb sellesse gruppi?
4.11 Haigla kirurgiaosakonnas töötab 15 kirurgi. Mitmel erineval viisil saab moodustada brigaadi, milles on üks opereeriv kirurg ja üks assisteeriv kirurg?
4.12 Mitmel erineval viisil saab 20 sõdurist määrata toimkonda kaks sõdurpoissi a) samade kohustustega; b) erinevate kohustustega?
4.13 Mitu erinevat 3-st aktsiast koosnevat portfelli saab moodustada 7 erineva firma aktsiatest.
4.14 Kaheksast nelgist ja viiest roosist soovitakse valmistada kimp, milles on 3 nelki ja 2 roosi. Mitu erinevat kimpu on võimalik valmistada?
4.15 Diplomaadid suruvad kohtudes teineteise kätt. Mitu käepigistust vahetatakse diplomaatilisel vastuvõtul, kus osaleb 100 diplomaati?
4.16 Mitu erinevat permutatsiooni saab moodustada sõna "mobiiltelefon" tähtedest?
4.17 Mitu erinevat neljakohalist PIN koodi on võimalik moodustada (kasutatakse vaid numbreid)? Kui suur on tõenäosus, et juhuslikult valitud numbrikombinatsioon langeb kokku leitud pangakaardi PIN koodiga?
4.18 Kui parool koosneb kuuest tähest A-Z (kokku 26 märki), mitu erinevat parooli on võimalik moodustada?
4.19 Leida vajalik parooli pikkus, kui soovime, et parooli eluiga oleks 6 kuud ja et selle aja jooksul oleks parooli leidmise tõenäosus alla 10^{-6} arvestades, et minutis on võimalik läbi proovida 8,5 parooli ja et kasutatavas tähestikus on 26 märki.
4.20 4 mehe ja 3 naise hulgast tuleb valida 4-liikmeline komisjon. Leida tõenäosus, et
  a) komisjonis on 2 meest ja 2 naist;
  b) komisjonis on vähemalt 2 naist.
4.21 Projektis osaleb 5 inimest, kes valitakse välja 4 mehe ja 5 naise hulgast. Leida tõenäosus, et
  a) projektis osalejate hulgas on 3 naist;
  b) projektis osalejate hulgas on vähemalt 3 naist;
  c) projektis osalejate hulgas on mehi rohkem kui naisi.
4.22 Firmal on 6 veokit, millest 2 on uued. Ühel päeval tuleb saata laadungid kahele erinevale tellijale. Kui laadungi saamise šansid on veokitel võrdsed, kui suur on tõenäosus, et üks uus veok jääb garaaži?

VASTUSED
4.8 30240 **4.9** 720; 0,00139 **4.10** 220; 0,25. **4.11** 210 **4.12** a) 190; b) 380 **4.13** 35. **4.14** 560. **4.15** 4950 **4.16** 386 188 800 **4.19** 9 **4.20** a) 0,514; b) 0,629. **4.21** a) 0,476; b) 0,643; c) 0,357. **4.22** 0,533

Tehted tõenäosustega.

Kui me teeme sündmustega mingi tehet, siis teades lähtesündmuste tõenäosusi, võime leida ka saadud sündmuse tõenäosuse.

NÄIDE 4.6.
200 loengukursust kuulanud üliõpilase seast sooritasid esimese kontolltöö positiivselt 160 üliõpilast ja teise kontrolltöö 140 üliõpilast. 124 üliõpilast sooritasid positiivselt mõlemad kontrolltööd. Õppejõud otsustas, et arvestuse saavad need üliõpilased, kes sooritasid positiivselt vähemalt ühe kontrolltöö. Kui suur on tõenäosus, et selle kursuse kuulaja saab arvestuse?
Olgu sündmus A esimese kontrolltöö positiivne sooritamine ja sündmus B teise kontrolltöö positiivne sooritamine. Vastavad tõenäosused on siis: $p(A)=\frac{160}{200}=0{,}8$ ja $p(B)=\frac{140}{200}=0{,}7$. Tõenäosus, et sooritatakse mõlemad kontrolltööd positiivselt, on

$p(A\cap B)=\frac{124}{200}=0{,}62$

Arvestuse saavad need, kes sooritasid positiivselt ainult 1. kontrolltöö pluss need, kes sooritasid positiivselt ainult 2. kontrolltöö pluss need, kes sooritasid positiivselt mõlemad kontrolltööd. Esimese kontrolltöö positiivselt sooritanud 160 üliõpilase seas on ka need, kes tegid ära mõlemad kontrolltööd. Ka 140 üliõpilase seas on mõlema kontrolltöö positiivselt sooritanud. Et me mõlema kontrolltöö sooritanuid kahekordselt ei arvestaks, tuleb arvestuse saajate arv leida järgmiselt: $160+140-124$
Arvestuse saamise tõenäosus leitakse järgmiselt:

$$\frac{160+140-124}{200}=\frac{160}{200}+\frac{140}{200}-\frac{124}{200}=0{,}8+0{,}7-0{,}62=0{,}88$$

Vastus: Tõenäosus, et selle kursuse läbimisel õnnestub saada arvestus, on 0,88

Kahe sündmuse **summa tõenäosus** võrdub nende sündmuste tõenäosuste summaga, millest on lahutatud nende sündmuste korrutise tõenäosus:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

Kui sündmused on teineteist välistavad, siis nende sündmuste korrutis on null, $p(A\cap B)=0$ ja summa tõenäosuse leidmine lihtsustub.

Kahe teineteist **välistava** sündmuse **summa tõenäosus** võrdub nende

$$p(\mathrm{A}\cup \mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})$$

NÄIDE 4.7. Kui kuni 17 aastaseid ostjaid on 20% ostjate üldarvust (tõenäosus $p(A)$ = 0,20) ja 18-25 aastaseid 15% (tõenäosus $p(B)$ = 0,15), siis tõenäosus, et ostja on kuni 25 aastane, on $p(A\cup B)=p(A)+p(B)=0{,}20+0{,}15=0{,}35$.

Tihti on sündmuse A tõenäosuse leidmisel teada lisainformatsiooni mingi teise sündmuse B toimumise kohta (toimus või ei toimunud).

Sündmuse A toimumise **tinglik tõenäosus** $p(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ on sündmuse A toimumise tõenäosus, kui on toimunud sündmus B.

NÄIDE 4.8. Firmas on 1200 töötajat: 960 meest ja 240 naist. Kahe aasta jooksul on edutatud 324 töötajat, nende seas oli 288 meest ja 36 naist. Firma juhtkonda süüdistatakse naiste diskrimineerimises, kuna naisi on vähe edutatud.

Olukorda kirjeldab järgmine tabel

	Edutati	Ei edutatud	Kokku
Mees	288	672	960
Naine	36	204	240
Kokku	324	876	1200

Vastavad tõenäosused

	Edutati	Ei edutatud	Kokku
Mees	0,24	0,56	0,80
Naine	0,03	0,17	0,20
Kokku	0,27	0,73	1,00

Tõenäosuste tabelist on näha, et suvalisest soost töötaja edutamise tõenäosus on 0,27. Kui suur on tõenäosus, et edutatud töötaja on mees või naine? Võtame kasutusele järgmised sündmuste tähistused: M - töötaja on mees; N - töötaja on naine; E - töötajat edutati.
Meil tuleb leida tinglikud tõenäosused $p(\mathrm{E}|\mathrm{M})$ ja $p(\mathrm{E}|\mathrm{N})$ ja neid võrrelda.

Mehe tõenäosuse edutamiseks leiame, kui edutatud meeste arvu jagame meeste koguarvuga: $\frac{288}{960}=0{,}3$. Kasutades aga tõenäosusi, siis $\frac{0{,}24}{0{,}8}=0{,}3$ ehk $p(\mathrm{E}|\mathrm{M})=\frac{p(\mathrm{M}\cap\mathrm{E})}{p(\mathrm{M})}$

Naise tõenäosuse edutamiseks leiame, kui edutatud naiste arvu jagame naiste koguarvuga: $\frac{36}{240}=0{,}15$. Kasutades aga tõenäosusi, siis $\frac{0{,}03}{0{,}20}=0{,}15$ ehk $p(\mathrm{E}|\mathrm{N})=\frac{p(\mathrm{N}\cap\mathrm{E})}{p(\mathrm{N})}$.

Kuna naistel on tõenäosus edutada saada kaks korda väiksem kui meestel, võib tõesti tegemist olla soolise diskrimineerimisega.

Sündmuse A **tinglik tõenäosus** sündmuse B suhtes on leitav järgmiselt

$$p(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap B)}{p(B)}$$

Kui on aga sündmuse A tinglik tõenäosus B suhtes on teada ja tuleb leida nende sündmuste korrutise tõenäosus, siis seda saab leida samast seosest.

Kahe sündmuse A ja B **korrutise tõenäosus** on

$$p(A\cap B)=p(A|B)\cdot p(B)$$
$$p(A\cap B)=p(B|A)\cdot p(A)$$

NÄIDE 4.9. Päevalehel "Meie Päev" ilmub ka pühapäevane lisaleht "Meie Pühapäev", mida on võimalik eraldi tellida. Toimetusele on teada, et kõikidest ajalehtede tellijatest tellib 84% just nende päevalehte. Lisaks on teada, et kõigist lehe "Meie Päev" tellijatest tellib 75% ka pühapäevast lisalehte. Kui suur on tõenäosus, et lugeja tellib nii päevalehe "Meie Päev" kui ka selle lisalehe?
Olgu päevalehe tellimine sündmus P ja lisalehe tellimine sündmus L. Siis $p(\mathrm{P})=0{,}84$ ja $p(\mathrm{L}|P)=0{,}75$ Mõlema lehe tellimise tõenäosus on $p(\mathrm{P}\cap L)=p(\mathrm{L}|P)\,p(P)=0{,}75\cdot0{,}84=0{,}63$

Kui sündmuse A tinglik tõenäosus B suhtes on sama, mis sündmuse A tõenäosus ilma sündmuse B toimumist arvestamata, $p(A|B)=p(A)$, siis A ja B on **sõltumatud sündmused**. Sellisel juhul korrutise tõenäosuse leidmine lihtsustub:

Kahe teineteisest **sõltumatu** sündmuse **korrutise tõenäosus** võrdub nende sündmuste tõenäosuste korrutisega:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

NÄIDE 4.10. Kui päikesepaistelisi ilmi on 40% päevadest (tõenäosus $p(P) = 0{,}4$) ja statistika loeng on ühel päeval nädalas ($p(S) = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$), siis tõenäosus, et statistika loeng satub päikesepaistelisele ilmale, on
$p(P \cap S) = p(P) \cdot p(S) = 0{,}4 \cdot 0{,}143 = 0{,}057$.

Kui aga $p(A|B) \neq p(A)$, on sündmused **sõltuvad**.

ÜLESANDED
4.23 Firmas on viis osakonda. Järgnevas tabelis on toodud ülevaade osakondade poolt esitatud tellimustest:

	Osakonnad					KOKKU
	Müük	Varustus	Tootmine.	Raamatupidamine	Ladu	
Väikevahendid	10	12	4	8	4	38
Sisseseade	1	3	9	1	1	15
Muu	0	0	4	1	2	7

Avastati, et ühes tellimuses esineb viga. Leida tõenäosus, et vigane tellimus
a) oli väikevahendite kohta;
b) ei olnud väikevahendite kohta;
c) tuli laost;
d) tuli tootmisosakonnast;
e) tuli kas tootmisosakonnast või laost;
f) ei tulnud ei tootmisosakonnast ega laost;
g) oli väikevahendite tellimus müügiosakonnast.

4.24 Ülikoolis uuriti 100 üliõpilast, kellel oli määratud stipendium. Selgus, et neist 40 töötasid, 25-l oli õppevõlgnevusi ning 15 nii töötasid kui olid ka õppevõlglased. Kui suur on tõenäosus, et stipendiumi saanud üliõpilane kas töötas või oli õppevõlglane?
4.25 "Kulli ja kirja" visatakse kaks korda. Kui suur on tõenäosus, et mõlemal korral tuleb "kull"?
4.26 "Kulli ja kirja" visatakse kaks korda. Leida tõenäosus, et
a) esimene kord tuleb "kiri" ja teine kord "kull";
b) ühel juhul tuleb "kiri" ja teisel juhul "kull".
4.27 2 inimest viskavad 60 korda "kulli ja kirja". Mitmel korral peaksid nad saama mõlemad tulemuseks "kiri"?
4.28 Münti on rikutud, nii et "kulli" tuleku tõenäosus on 0,2.
a) Kui suure tõenäosusega tuleb esimesel viskel "kiri" ja teisel viskel "kull"?
b) Kui suure tõenäosusega tuleb kolmel viskel "kiri"?
4.29 Turuuring on näidanud, et reedeõhtust meelelahtussaadet jälgib peredes regulaarselt 30% meestest ja 20% naistest. Lisaks on teada, et 12% abielupaaridest jälgivad saadet koos. Kui suur on tõenäosus, et vähemalt üks abikaasa on saate regulaarne jälgija?
4.30 Tõenäosus, et aktsiad A annavad tulu, on 0,7 ning tõenäosus, et aktsiad B annavad tulu, on 0,9. Kui suur on tõenäosus, et tulu toovad mõlemad aktsiad?
4.31 Valikvastustega testil on 5 küsimust, igal küsimusel kolm vastusevarianti. Õige on üks ja ainult üks vastusevariant. Kui üliõpilane valib vastused huupi, kui suur on tõenäosus, et ta vastab õieti
a) kõikidele küsimustele.
b) neljale küsimusele.
c) kolmele küsimusele.
4.32 Ettevõte saatis kiirtellimuse vajaminevate detailide kohta kahele tarnijale. Kui 4 päeva jooksul kumbagi tellimust ei täideta, tuleb tootmine seisata kuni esimese partii saabumiseni. Tõenäosus, et tarnija A täidab tellimuse 4 päeva jooksul, on 0,55. Tõenäosus, et tarnija B täidab tellimuse 4 päeva jooksul, on 0,35.
a) Kui suur on tõenäosus, et mõlemad tellimused täidetakse 4 päeva jooksul?
b) Kui suur on tõenäosus, et vähemalt üks tellimus täidetakse 4 päeva jooksul?
c) Kui suure tõenäosusega tuleb tootmine 4 päeva pärast seisata?

4.33 Firma taotleb kahte lepingut. Lepingu *A* sõlmimise tõenäosus on 0,4 ja lepingu *B* sõlmimise tõenäosus on 0,1. Leida järgmised tõenäosused:

a) sõlmitakse mõlemad lepingud;
b) ei sõlmita kumbagi lepingut;
c) sõlmitakse üks leping

4.34 AS Nõukogusse kuulub 15 liiget. Reorganiseerimise läbiviimiseks on vajalik 80% liimete nõusolek. Kui suure tõenäosusega läheb reorganiseerimine läbi, kui iga üksiku nõukogu liikema korral on poolt olemise tõenäosus 0,7?

4.35 Enne valimisi uuriti toetust erinevatele parteidele. Küsitleti 1000 inimest, kellest 600 olid naised. Parteid A toetas 350 vastajat, parteid B 320 vastajat, parteid C 300 ja 30 vastajal puudus eelistus. Eeldades, et toetus ühele või teisele parteile ei sõltu vastaja soost, leida

a) mitu meest võis toetada parteid A;
b) mitu naist võis toetada parteid C;
c) mitu naist võis toetada kas parteid A või parteid C.

4.36 Auto esitule kustumise üheks põhjuseks võib olla kas läbipõlenud pirn või rike elektrisüsteemis. Rikke esinemise tõenäosus on 0,2 ja pirni läbipõlemise tõenäosus 0,4. Leida tõenäosus, et

a) tule kustumise põhjuseks on nii rike elektrisüsteemis kui pirni läbipõlemine;
b) tule kustumist ei põhjustanud ei rike elektrisüsteemis ega pirni läbipõlemine.

4.37 Müügikoolitusprogrammist kokkuvõtete tegemisel selgus, et 50-st eelmisel aastal preemia saanud müügiesindajast olid 20 läbinud koolituse. Kokku on firmas 200 müügiagenti.

a) Kui suur on tõenäosus, et müügiesindaja saab preemia?
b) Kui suur on tõenäosus, et preemia saanud müügiesindaja on läbinud koolituse?
c) Kui suur on tõenäosus, et müügiesindaja on saanud nii koolitust kui ka preemiat?
d) Oletame, et koolituse läbib 40% kõikidest müügiesindajatest. Kui suur on tõenäosus, et koolituse läbija saab preemia?
e) Hinnata, kas koolitusest on kasu, st kas koolitus ja preemia saamine on sõltuvad või sõltumatud sündmused.

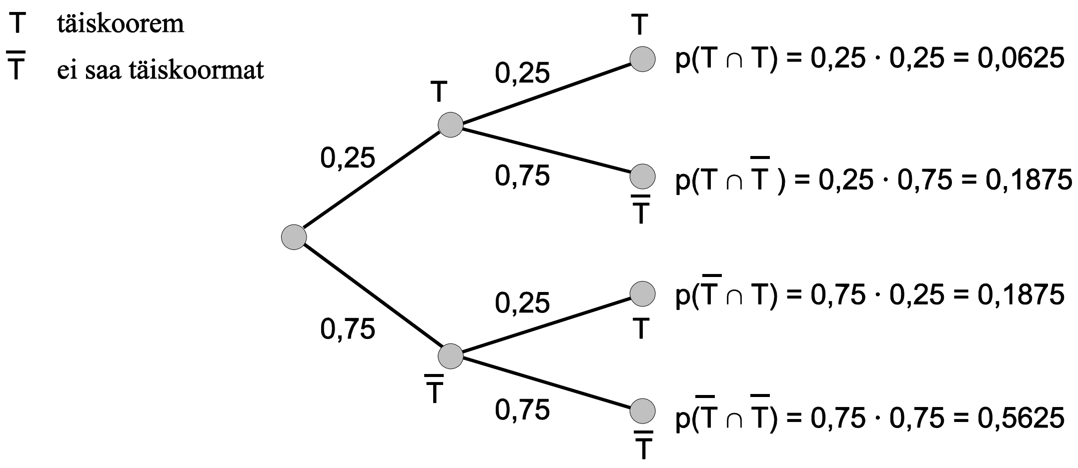
VASTUSED

4.23 a) 0,633; b) 0,367; c) 0,117; d) 0,283; e) 0,400; f) 0,600; g) 0,17.**4.24** 0,5 **4.25** 0,25. **4.26** a) 0,25; b) 0,5. **4.27** 15. **4.28** a) 0,16; b) 0,512. **4.29** 0,38 **4.30** 0,63. **4.31** a) 0,0041; b) 0,041; c) 0,16 **4.32**a) 0,19; b) 0,71; c) 0,29 **4.33** a) 0,04; b) 0,54; c) 0,42 **4.34** 1,38% **4.35**a)140; b)180; c)390 **4.36** a) 0,08 b) 0,48 **4.37**a) 0,25; b)0,40; c)0,10; d)0,25; e) sõltumatud, koolitusest pole kasu.

Tõenäosuste puu

NÄIDE 4.11. Tõenäosuste puu.
Veoauto teeb päevas kaks reisi. Täiskoorma (T) saamise tõenäosus on 0,25. Eeldades, et täiskoorma saamise tõenäosus päeva teisel reisil ei sõltu esimesel reisil saadud koormast, leida tõenäosus, et veok saab täpselt ühe täiskoorma päevas.
Lahendame ülesande, kasutades tõenäosuste puud:

Tõenäosuste puu



Otsitav tõenäosus on kahe keskmise tõenäosuse summa:

$$p((T\cap\overline{T})\cup(\overline{T}\cap T)) = p(T\cap\overline{T}) + p(\overline{T}\cap T) = p(T)p(\overline{T}) + p(\overline{T})p(T) = 0{,}1875 + 0{,}1875 = 0{,}375$$

ÜLESANDED

4.38 Uuritakse lüliti töökindlust. On kindlaks tehtud., et sisselülimisel on tõrke tekkimise tõenäosus 0,1. Kui tõrget ei tekkinud, on järgmisel katsel tõrke tõenäosus sama. Kui aga tekib tõrge, on järgmisel katsel tõrke tekkimise tõenäosus 0,9. Seega tõrke tekkimise tõenäosus sõltub sellest, milline oli eelmine sündmus. Kasutada tõenäosuste puud järgmiste tõenäosuste leidmiseks:

a) tõrget ei teki kolmel korral järjest;
b) esimesel korral tekib tõrge, siis aga töötab edukalt kaks katset järjest;
c) esimesel katsel töötab, siis tõrge, siis töötab ja jälle tõrge.

4.39 Pank A planeerib korrastada krediitkaartide väljastamist. Eelmistel aastatel 5% kaardiomanikest ei suutnud oma arveid ära maksta ja pank sai kahjumit. Panga juhtkond on analüüsi teel leidnud, et suvalise krediitkaardi omaniku maksevõimetuks jäämise tõenäosus on 0,05. Lisaks sellele on kindlaks tehtud, et nendel, kes maksevõimetuks ei muutunud, esines tõenäosusega 0,2 siiski ühe või mitme kuu kaarditasu võlgu jäämist. Maksevõimetuks jäänutel oli see tõenäosus muidugi 1. Leida, kui suure tõenäosusega kaotab maksevõime see klient, kellel on jäänud võlgu kaardihooldustasu. Pank otsustas, et sulgeb need kaardid, kelle omanikel on tõenäosus jääda maksevõimetuks suurem kui 0,20. Kas on põhjust sulgeda kaart, mille omanik jäi võlgu kuutasu?

4.40 Jalgpallimeeeskond mängib 55% mängudest koduväljakul ja 45% külas. Kodus mängides on võidu tõenäosus 0,80, külas mängides võidetakse aga tõenäosuega 0,65. Eelmisel laupäeval peetud mängus saavutati võit. Kui suure tõenäosusega toimus see mäng koduväljakul?

4.41 Tootmise käivitamisel tuleb seadistada tööpinke. Korrektse seadistamise tõenäosus on 0,90. Kui tööpink on seadistatud korrektselt, siis defektsete detailide osakaal on 5%. Kui aga seadistus pole korrektne, on defektsete detailide osakaal 75%.
a) Kui suur on tõenäosus, et ühe detaili kontrollimisel avastatakse defekt?
b) Kvaliteedikontroll valis välja ühe detaili ja avastas, et see on defektne. Kui suure tõenäosusega on tööpink valesti reguleeritud?

VASTUSED

4.38 a) 0,729; b) 0,009 c) 0,0009. **4.39** 0,21, jaa. **4.40** 0,60. **4.41** a) 0,12; b) 0,625.

Keskväärtus ehk oodatav väärtus

NÄIDE 4.12.

Uuriti poes toimunud varguste sagedust.Tabelis on näidatud, mitmel päeval mitu vargust toimus.

varguste arv päevas (x_i)	0	1	2	3	4	KOKKU
päevade arv e. sagedus (f_i)	10	18	15	6	1	50
$f_i x_i$	0	18	30	18	4	70

Keskmine varguste arv päevas on leitav kaalutud aritmeetilise keskmise abil: $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{70}{50} = 1{,}4$.

Esitame tabelis toodud andmed uuesti, kasutades sageduse asemel statistilist tõenäosust $p_i = \frac{\text{sündmuse toimumise sagedus}}{\text{katsete arv}}$.

varguste arv päevas (x_i)	0	1	2	3	4	KOKKU
vastava variandi tõenäosus (p_i)	0,20	0,36	0,30	0,12	0,02	1
$p_i x_i$	0	0,36	0,60	0,36	0,08	**1,4**

Päevas toimunud varguste arvu **keskväärtus** ehk **oodatav väärtus** on 1,4.

Olgu meil varieeruva suuruse X väärtuste kogum ehk variatsioonrida x_1; x_2; $...x_i$;$...x_N$. Suurus X võib omada mingit kindlat väärtust x_i teatud tõenäosusega $p_i = p(X = x_i)$.

Kui varieeruva suuruse i-nda variandi x_i esinemise tõenäosus on p_i , siis selle suuruse **keskväärtus** ehk **oodatav väärtus**

$$\bar{x} = \sum p_i x_i$$

Oodatavat väärtust kasutatakse **otsustamise teoorias** (*decision theory*). Valiku tegemisel erinevate käitumisvariantide vahel kasutatakse oodatavat väärtust kriteeriumina. Näiteks otsustatakse suurema oodatava kasumiga variandi kasuks. Investori käitumisteoorias on tüüpiliseks olukorraks püüd kindlaks määrata, milline investeering annab suurema oodatava väärtuse, kui on teada majandussituatsioonide sündmuste toimumise tõenäosused ja neile vastavad rahavood. Inglisekeelsest terminist *ecpected value* tulenevalt kasutatakse ka tähistust $EV(x)$.

NÄIDE 4.13.
Tabelis on toodud ootused kahe firma aktsiate käitumise kohta erinevates majandusolukordades.

Üldine majandusolukord	Tõenäosus	Tulumäär	
		Firma A aktsiad	Firma B aktsiad
Tõus	0,2	45%	25%
Stabiilne	0,5	20%	0%
Langus	0,3	5%	-10%

Leiame oodatavad tulumäärad mõlema firma aktsiate jaoks:

$$\bar{x}_A = 0{,}2 \cdot 45\% + 0{,}5 \cdot 20\% + 0{,}3 \cdot 5\% = 20{,}5\%$$
$$\bar{x}_B = 0{,}2 \cdot 25\% + 0{,}5 \cdot 0\% + 0{,}3 \cdot (-10\%) = 2\%$$

Olgu meie portfellis on 75% aktsiaid A ja 25% aktsiaid B. Portfellitulu: $\bar{x}_p = 0{,}75 \cdot 20{,}5\% + 0{,}25 \cdot 2\% = 15{,}875\% \approx 15{,}9\%$

Kui me moodustame väärtpaberiportfelli, siis oodatava **portfellitulu** võime leida seosest

$$\bar{x}_p = \sum w_i x_i$$

kus w_i on teatud aktsiate osakaal portfellis ja x_i vastavate aktsiate oodatav tulumäär.

ÜLESANDED
4.42 Jäätisemüüja läbimüük sõltub ilmast. 20% päevadest on soe ilm, 30% külm ja ülejäänud päevadel keskmine. Sooja ilma korral on keskmine päevatulu 2200 kr, keskmise ilma korral 1300 kr ja külma ilma korral 400 kr. Keskmine päevakulu on 800 kr. Leida oodatav kasum päevas.
4.43 Kaubitseja müüb turul piima. Piima ostab ta hinnaga 3 kr liiter ja müüb hinnaga 4,5 kr liiter. 50 liitrit õnnestub tal maha müüa 10% päevadest, 100 l müüb ta 40%-l, 200 liitrit 30%-l ja 300 liitrit õnnestub tal maha müüa 20%-l päevadest. Müümata jäänud piima ostab päeva lõpul talt ära kohalik farmer hinnaga 70 senti liiter. Ühel päeval ostis ta kauplemiseks 200 liitrit piima. Leida oodatav kasum sellel päeval.
4.44 On hinnatud kahe erineva projekti võimalikku kasumit. Kumb projekt valida ja miks?

Projekt A		Projekt B	
Tõenäosus	Kasum	Tõenäosus	Kasum
0,6	4000	0,2	2000
0,4	8000	0,3	2500
		0,3	4000
		0,1	8000
		0,1	12000

4.45 Firma raamatupidamisest saadud andmetel on viimase 3 aasta jooksul saadud erinevatel kuudel kasumit järgmiselt: 8 kuud 20 000 kr, 16 kuud 30 000 kr, 10 kuud 40 000 kr ja 2 kuud 50 000 kr. Leida oodatav kasum kuus.
4.46 Firma, mis tegeleb torude paigaldamisega maasse, sõlmis lepingu 500 m toru panekuks. Kuivade ilmade korral pannakse päevas 20 m toru, vihmaste ilmade korral töö efektiivsus langeb 60%. Vihmaste ilmade esinemise tõenäosus on 0,3. Leida oodatav päevade arv, mis kulub lepingu täitmiseks.
4.47 Majanduskasvu korral on aktsiate A tulumäär 15% ja aktsiatel B 17%, languse korral vastavalt -5% ja -6%. Stabiilses

olukorras on mõlema aktsia tulumäär 0. Nii majanduskasvu kui ka -languse tõenäosus on 0,3.

a) Kui väärtpaberi portfell moodustada vaid ühte tüüpi aktsiatest, kumba tuleks eelistada?

b) Kui portfellis on 25% aktsiaid A ja ülejäänud on aktsiad B, kui suur on oodatav portfellitulu?

VASTUSED

4.42 410 kr; **4.43** 91 kr. **4.44** Projekt A: 5600 (B: 4350). **4.45** 31 700 kr. **4.46** 36,25. **4.47** a) B; b) 3,2% .

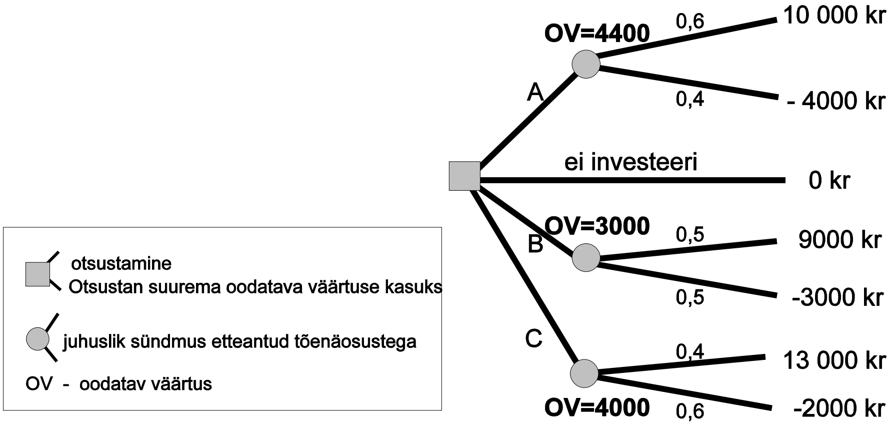
Otsustamise puu

NÄIDE 4.14.

Olgu meil oma kapitali investeerimiseks 3 erinevat varianti. Iga variandi korral võime teatud tõenäosusega saada kasumit või kahjumit:

Variant	A		B		C	
Tõenäosus	0,6	0,4	0,5	0,5	0,4	0,6
Kasum (kahjum)	10000	-4000	9000	-3000	13000	-2000
Oodatav kasum	$0{,}6 \cdot 10\,000 + 0{,}4 \cdot (-4000) =$ **4400**		**3000**		**4000**	

Kuna variandi A korral on oodatav kasum kõige suurem, tuleks valida see variant. Kui see otsustus tehakse, võib tulemuseks olla kas 10000 krooni suurune kasum või 4000 krooni suurune kahjum. Seega oodatav väärtus 4400 tegelikult ei realiseeru. Situatsiooni võib illustreerida otsustamise puuga (joonis 15).



Joonis 15.Otsustamise puu (*decision tree)*

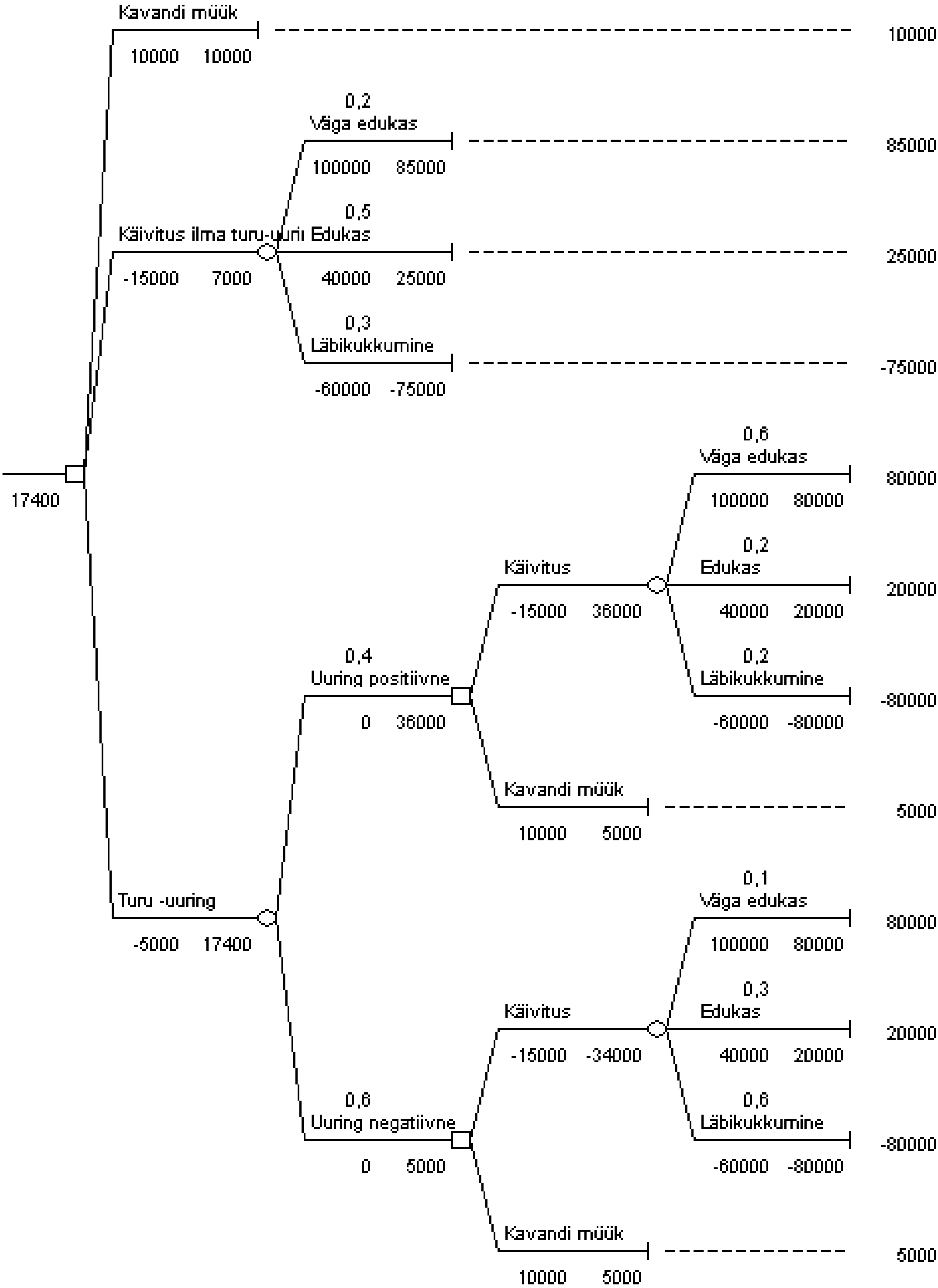
NÄIDE 4.15.

Toimub uue toote arendus. Tootmise käivituskulud on 15 000 kr, turu-uuring maksab 5000 kr. Tõenäosused toote müügiedukuse kohta on toodud alljärgnevas tabelis.

Toote müügiedukus (sündmus C_i)	Erinevate sündmuste tõenäosused p			Tulu V_i (rahavoog)
	Ilma turu-uuringuta	Turu-uuring annab positiivse tulemuse	Turu-uuring annab negatiivse tulemuse	
Väga edukas	0,2	0,6	0,1	100 000 kr
Keskmine	0,5	0,2	0,3	40 000 kr
Läbikukkumine	0,3	0,2	0,6	- 60 000 kr

Eelmiste sedalaadsete toodete kogemus näitab: tõenäosus, et turu-uuringu tulemus on positiivne, on 0,4. Kui loobuda toote käivitamisest ja müüa ideekavand maha, on võimalik saada selle eest 10 000 kr.

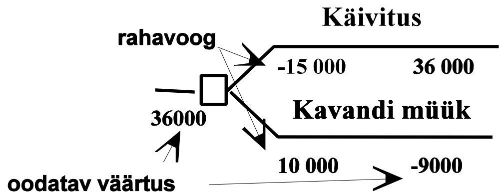
Joonisel 19 on toodud vastav otsustamise puu.



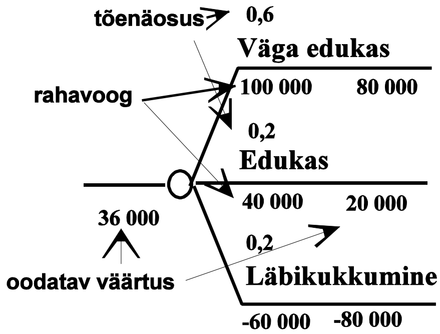
Joonis 16 Otsustamise puu

Peale analüüsi saadakse raport oodatavate väärtuste kohta erinevate otustusvariantide korral.
Otustusvariandid ja neile vastavad oodatavad tulemused:
a) loobuda tootmisest ja müüa idee maha : 10 000 kr
b) käivitada tootmine ilma turu-uuringuta: 7000 kr
c) käivitada tootmine koos eelneva turu-uuringuga: 17 400 kr

Otsustamise puu koosneb sõlmedest (*node*) ja harudest (*branche*). Sõlmesid on kolme liiki:
1. **Otsustamine** (*decicion node*) - valitakse parima oodatava väärtusega haru.
Otsustamise sõlmest lähtuvad otsustamise harud, mis vastavad erinevatele valikuvõimalustele. Valikud peavad olema üksteist välistavad ja moodustama täieliku süsteemi (kõik valikuvariandid peavad olema kajastatud). Iga haru juurde lisatakse vastava valikuga kaasnev rahavoog (kulu või tulu, mis kaasneb selle valikuga). Sõlmest vasakule kantakse antud sõlmele vastav oodatav väärtus.



2 **Juhuslik sündmus** (*event node*) - realiseerub juhuslik sündmus etteantud tõenäosustega.
Sündmuse sõlmest hargnevad harud kirjeldavad erinevaid võimalikke juhuslikke sündmusi. Sündmused peavad moodustama täieliku süsteemi (üksteist välistavad, tõenäosuste summa peab olema 1). Iga haru juurde lisatakse vastava sündmuse tõenäosus ja sündmuse realiseerumisega kaasnev rahavoog (kulu või tulu, mis kaasneb selle sündmusega). Sõlmest vasakule kantakse vastav oodatav väärtus (harude tõenäosuste ja oodatavate väärtuste korrutiste summa).



3. **Lõppsõlm** (*terminal node*)

Igale lõppsõlmele vastab lõppväärtus (*terminal value*, *outcome value*). Lõppväärtus iseloomustab konkreetset stsenaariumi (otsustuste ja juhuslike sündmuste järgnevus esimesest otsustussõlmest lõppsõlmeni).

Suurus, mille alusel otsuseid vastu võetakse, võib olla kas kasum (maksimeerimine) või kulu (minimeerimine). Projektijuhtimisel võib olla ka aeg.
Otsustamise puu konstrueerimiseks Excelis on võimalik kasutada abivahendit *Decision Tree*. Selle abil on koostatud ka joonisel 15 toodud puu. Vastava abivahendi lisamiseks tuleb Excelile lisada *Add-In treeplan.xla* (saadaval koos vastava juhendmaterjaliga http://www.decisiontoolpak.com/).

ÜLESANDED
4.48 Firma on välja töötanud uue toote. Reklaamikampaania, mis maksab 20 000 kr, tagab toote edukuse 70%-lise tõenäosusega. Sellisel juhul on tulem 110 000 kr. Läbikukkumise korral on tulu vaid 20 000 kr. Kogemused eelmiste toodetega näitavad, et ilma reklaamita on toote edukuse tõenäosus 50% ning sel juhul tulu on 100 000 kr, läbikukkumise korral aga 15 000 kr. Konstrueerida "otsustamise puu" ja esitada selle põhjal aruanne otsustamiseks vajalike andmetega.
4.49 Peale tootmiskulude mahaarvamist on puhaskasum praeguse tootmismahu täielikul ärakasutamisel 160 000 krooni. Tootmisjuhil on valida järgmiste võimalike tegevusvariantide vahel:
a) Jätkata samade seadmetega ning loobuda üleminekust uuele arengutasemele.
b) Võtta ette uuringute tegemine, mis maksavad 200 000 krooni ja mille korral positiivse tulemuse tõenäosus on 0,8. Sellisel juhul on oodatav puhaskasum 600 000 krooni (uurimiskulusid arvestamata). Negatiivse tulemuse korral on oodatav puhaskasum 50 000 krooni.
c) Valida odavam uuring, mis maksab 80 000 krooni ning mille korral positiivse tulemuse tõenäosus on 0,5 oodatava puhaskasumiga 500 000 krooni. Negatiivse tulemuse korral on puhaskasum 40 000 krooni.
4.50 On olemas uue toote kavand. Tootmisjuhil tuleb otsustada, kas panna see kõrvale, müüa kavand 600 000 krooni eest või hakata uut toodet tootma. Kui toode on edukas, on oodatav kasum 1 200 000 krooni, vastasel juhul 200 000 krooni.
Tuleb samuti otsustada, kas tellida turu-uuring või mitte. Turu-uuringu maksumus on 40 000 krooni.
On teada, et üldiselt on uus toode edukas 60%-l juhtudest. Kui aga turu-uuring annab positiivse tulemuse, suureneb edukuse tõenäosus 90%-ni. Negatiivse tulemuse korral on eduka müügi tõenäosus 30%. Lähiminevikus on 50% turu-uuringutest sama

tüüpi toodete kohta andnud positiivse tulemuse.
Leida oodatava kasumi väärtus erinevate käitumisvariantide korral.

VASTUSED

4.48 1.variant: reklaam valida, 63 000 kr; 2. variant: loobuda reklaamist, 57 500 kr. **4.49** a) 160 000; b) 290 000; c) 190 000.
4.50 600 000; 800 000; 810 000