3. INTEGRAALID

Määramata integraali mõiste

NÄIDE 3.1. Kulufunktsiooni ledmine piirkulu järgi
Olgu meil teada piirkulu

$$MC = 2q + 200$$

Leiame kulufunktsiooni avaldise $C(q)$. Kuna piirkulu on kulufunktsiooni tuletis, $MC(q) = C(q)'$, tuleb meil leida selline funktsioon, mille tuletis on $2q + 200$. Selliseks funktsiooniks on

$$C(q) = q^2 + 200q + const\ ,$$

kus *const*on suvaline konstantne suurus ja kulufunktsioonis tähendab ta püsikulusid. Kuna konstandi tuletis on null, siis piirkulu avaldises püsikulud ei kajastu ja kulufunktsiooni täielikuks määramiseks on vaja see konstant määrata. Piirkulu avaldise põhjal saame leida vaid muutuvkulu.

NÄIDE 3.2. Tarbimisfunktsiooni leidmine tarbimise piirkalduvuse järgi.
Olgu tabimise piirkalduvus

$$MPC = \frac{dC(Y)}{dY} = 0{,}5 + \frac{0{,}1}{\sqrt{Y}}$$

kus $C(Y)$ on tarbimisfunktsioon ja Y rahvatulu. Tuleb leida tarbimisfunktsioon, see tähendab funktsioon, mille tuletis rahvatulu Y järgi on MPC. Lisaks sellele on teada, et autonoomne tarbimine on 33 ühikut.
Selliseks funktsiooniks on

$$C(Y) = 0{,}5\,Y + 0{,}2\sqrt{Y} + 33$$

Kontrollimikseks tuleb võtta saadud funktsioonist tuletis rahvatulu Y järgi.

Funktsiooni $F(x)$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **algfunktsiooniks**, kui $F(x)' = f(x)$. Funktsioooni $f(x)$ algfunktsiooni leidmist nimetatakse **integreerimiseks** (*integration, antidifferentation*).

$$\text{algfunktsioon } F(x) \xrightarrow{\text{diferentseerimine}} \text{funktsioon } f(x)$$

$$\text{algfunktsioon } F(x) \xleftarrow{\text{integreerimine}} \text{funktsioon } f(x)$$

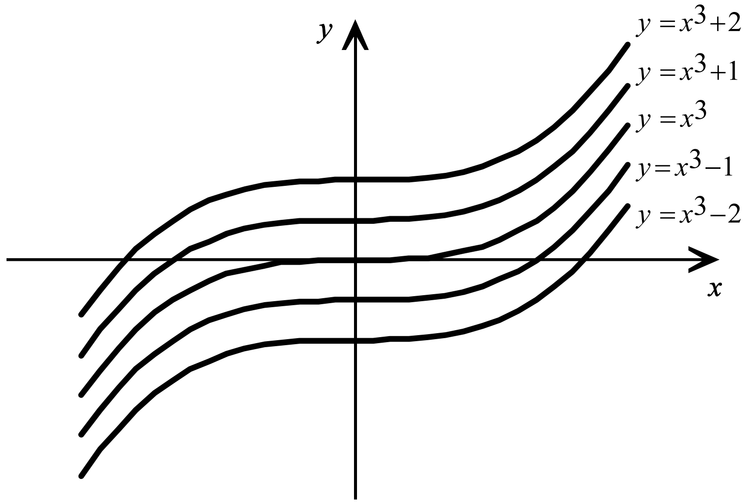
Kui $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon, siis on seda ka $F(x) + c$, kus c on suvaline konstant, sest

$$[F(x) + c]' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x)$$

Seega, kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon, siis on tal neid lõpmatu hulk. Funktsiooni f kõik algfunktsioonid saame avaldisest $F(x) + c$, andes konstandile c kõik võimalikud väärtused.

NÄIDE 3.3. Algfunktsioonid ja nende graafikud
Funktsiooni $y = 3x^2$ algfunktsioon on $y = x^3$, sest $(x^3)' = 3x^2$. Funktsiooni $y = 3x^2$ algfunktsiooniks on ka funktsioon $y = x^3 + 1$, sest ka $(x^3 + 1)' = 3x^2$. Algfunktsiooniks on ka $y = x^3 - 1$, sest $(x^3 - 1)' = 3x^2$.
Kõigi nende algfunktsioonide graafikute puutujad on paralleelsed, puutujate tõus on ühesugune (joonis 1).

Funktsiooni f algfunktsiooni $F(x) + c$ graafik saadakse algfunktsiooni $F(x)$ graafikust paralleellükke abil konstandi c võrra y-telje sihis.



Joonis 1 Erinevate algfunktsioonide graafikud saadakse paralleellükke abil

Avaldist $F(x)+c$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon ja c suvaline konstant, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **määramata integraaliks** ja tähistatakse kujul $\int f(x)\,dx$:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$
$$\text{kui} \quad F(x)' = f(x)$$

Konstanti c nimetatakse **integreerimiskonstandiks**.

Mõnede probleemide puhul on teada mingi suuruse muutumise kiirus ja tuleb leida vastav suurus. Kuna funktsiooni muutumise kiirus on funktsiooni tuletis, siis vastava suuruse leidmiseks tuleb selle muutumise kiirust integreerida.

NÄIDE 3.4. Elanike arvu mudeli leidmine elanike arvu muutumise kiiruse järgi

Prognoosi järgi kasvab linna A elanikkond *t* kuu pärast kiirusega $2+6\sqrt{t}$ elanikku kuus. Leida elanike arvu muutumise mudel.

Lahendus.

Olgu $N(t)$ vastava linna elanike arv. Elanike arvu muutumise kiirus on siis tuletis aja *t* järgi:

$$\frac{dN}{dt} = 2+6\sqrt{t}$$

Järelikult elanike arvu mudel on integraal sellest avaldisest:

$$N(t) = \int \frac{dN}{dt}\,dt = \int (2+6\sqrt{t})\,dt = 2t + 4t^{3/2} + c$$

Kui $t=0$, siis $N(0)=c$. Seega integreerimiskonstandi väärtuseks on siin elanike arv ajahetkel $t=0$ ja sõltub sellest, milline konkreetne kuu võetakse ajatelje nullpunktiks.

Diferentseerimine võimaldab leida ümbritsevas reaalsuses toimuva nähtuse, protsessi intensiivsust (näit. suuruse muutumise kiirus), kui on teada seda nähtust kirjeldav matemaatiline mudel. **Integreerimine** võimaldab leida nähtust, protsessi kirjeldavat matemaatilist mudelt, kui on teada nähtuse kulgemise intensiivus, protsessi kirjeldava suuruse muutumise kiirus.

$$\text{nähtus} \;\underset{\text{integreerimine}}{\overset{\text{diferentseerimine}}{\rightleftarrows}}\; \text{nähtuse intensiivsus}$$

Põhiintegraalide tabel. Määramata integraali omadused.

Lähtudes diferentseerimise põhivalemitest (elementaarfunktsioonide tuletised), võib välja kirjutada ka integreerimise põhivalemid.
Näiteks tuletise võtmisel

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a$$

siis

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \ , \ a \neq -1$$

Mõningaid põhiintegraale

1. $\int 0\,dx = c$	2. $\int a\,dx = ax + c$
3. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$	4. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \ , \ a \neq -1$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + c$	6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \ , \quad (a>0, \quad a \neq -1)$
7. $\int e^x dx = e^x + c$	8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
9. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$	10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

Näiteid põhiintegraalide tabeli juurde:

$\int 5\,dx = 5x + c$ (2)

$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$ (4)

$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$ (4)

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3} + c \qquad (4)$$

$$\int 4^x\,dx = \frac{4^x}{\ln 4} + c \qquad (6)$$

Määramata integraali **omadusi**

1. Konstandi võib integraali märgi alt välja tuua

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

2. Integraal funktsioonide summast (vahest) võrdub nende funktsioonide integraalide summaga (vahega)

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Näiteid integraalide omaduste kasutamise kohta:

$$\int \left(3e^x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^2\right)dx = 3\int e^x dx + 2\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int x^2 dx = 3e^x + 2\ln|x| - \frac{1}{6}x^3 + c$$

$$\int \frac{3x^5 + 2x - 5}{x^3}dx = \int \left(3x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)dx = \int (3x^2 + 2x^{-2} - 5x^{-3})\,dx = 3\int x^2 dx + 2\int x^{-2}dx - 5\int x^{-3}dx =$$
$$= x^3 - 2x^{-1} + \frac{5}{2}x^{-2} + c = x^3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{2x^2} + c$$

ÜLESANDED

3.1 Leida järgmised integraalid

a) $\int -\frac{1}{2}dx$ b) $\int x^3 dx$ c) $\int \frac{1}{x^4}dx$

d) $\int x^{\frac{2}{3}}dx$ e) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ f) $\int 3e^x dx$

g) $\int \frac{8\,dx}{x}$ h) $\int 2\sin x\,dx$ i) $\int \frac{a\,dx}{x^3},\ a = const$

3.2 Leida järgmised integraalid

a) $\int 3{,}5\,dx$ b) $\int \frac{dx}{x}$ c) $\int 5x^{-1}dx$

d) $\int 2^x dx$ e) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{4}dx$ f) $\int b e^x dx,\ b = const$

3.3 Leida järgmised integraalid

a) $\int \left(3x^2 - \sqrt{5x} + 2\right)dx$ b) $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\right)dx$ c) $\int \left(\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x}\right)dx$

d) $\int \left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2x^2} + e^2 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$ e) $\int (\sin x + \cos x)\,dx$ f) $\int \frac{2x^2 + x}{\sqrt{x}}dx$

g) $\int \frac{x^3 - 3x^2}{5}dx$ h) $\int \frac{4x^3 + x}{\sqrt[3]{x}}dx$ i) $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}dx$

VASTUSED **3.1** a) $-\frac{1}{2}x+c$; b) $\frac{1}{4}x^4+c$; c) $-\frac{1}{3x^3}+c$; d) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$; e) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+c$; f) $3e^x+c$; g) $8\ln|x|+c$; h) $-2\cos x+c$; i) $-\frac{a}{2x^2}+c$. **3.2** a) $3{,}5x+c$ b) $\ln|x|+c$; $5\ln|x|+c$; d) $\frac{2^x}{\ln 2}+c$; e) $\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5}+c$; f) be^x+c **3.3** a) $x^3-\frac{2\sqrt{5}}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x+c$; b) $2x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^2}+\ln|x|+c$; c) $\frac{e^x}{2}+\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+c$; d) $\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2x}+e^2x-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+c$; e) $\sin x-\cos x+c$; f) $\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$; g) $\frac{x^4-4x^3}{20}+c$; h) $\frac{12}{11}\sqrt[3]{x^{11}}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+c$; i) $\frac{x^3+3x}{3}+c$

Konstandi määramine

Mõningate probleemide korral on antud lisaks integreerimist vajavale funktsioonile ka lisatingimused, näiteks funktsiooni väärtus y_0 argumendi x_0 korral. Nendest lisatingimustest on võimalik määrata integreerimiskonstandi väärtust.

NÄIDE 3.5. Konstandi määramine
Näites 3.1 määrasime piirkulu järgi kulufunktsiooni avaldise konstandi täpsusega:

$$C(q)=q^2+200q+const$$

Kui meil on näiteks teada, et koguse 50 korral olid kulud 22500 ühikut, $C(50)=22500$, saame määrata konstandi väärtuse:

$$const=C(50)-(50^2+200\cdot 50)=22500-(2500+10000)=10000$$

Kulufunktsiooniks on nüüd $C(q)=q^2+200q+10000$

NÄIDE 3.6. Konstandi määramine
Näites 3.4 leitud elanike arvu mudel oli $N(t)=2t+4t^{3/2}+c$. Kui me teame, et praegu on elanike arv 5000 ja võtame praeguse kuu jaoks t=0 , siis $N(0)=5000$. Teiselt poolt

$$N(0)=2\cdot 0+4\cdot 0^{3/2}+c$$
$$N(0)=c$$
$$5000=c$$

Asendades $N(t)$ avaldises konstandi selle väärtusega, saame elanike arvu jaoks järgmise mudeli $N(t)=2t+4t^{3/2}+5000$

NÄIDE 3.7. Puhasinvesteering ja põhikapitali muutumine
Olgu praegu põhikapitali suurus 1,5 milj krooni. Sellel aastal on investeeritakse lisaks (puhasinvesteering, *net investment*) 120 tuh. kr. Igal järgmisel aastal puhasinvesteering suureneb 15%. Kui suur on põhikapital 5 aasta pärast?
Lahendus:
Puhasinvesteering on ajas muutuv:

$$I(t)=1{,}15^t\cdot 120\,000$$

Kui kogu investeering läheb põhikapitali suurendamiseks, siis põhikapitali muutus aastas (muutumise kiirus) on võrdne puhasinvesteeringuga

$$\frac{dK}{dt}=I(t)$$
$$\frac{dK}{dt}=1{,}15^t\cdot 120\,000$$

Põhikapitali leiame nüüd integreerimise teel:

$$K(t) = \int I(t)\,dt$$

$$K(t) = \int 1{,}15^t \cdot 120000\,dt = 120000\int 1{,}15^t dt = 120\,000\frac{1{,}15^t}{\ln 1{,}15} + c$$

Integreerimiskonstandi määramiseks arvestame, et praegu (t=0) on põhikapitali suurus 1,5 milj. kr:

$$1\,500\,000 = 120\,000\frac{1{,}15^0}{\ln 1{,}15} + c$$

$$1\,500\,000 = 120\,000\frac{1}{\ln 1{,}15} + c$$

$$1\,500\,000 = 859\,000 + c$$

$$641\,000 = c$$

Põhikapitali avaldis on nüüd

$$K(t) = 120\,000\frac{1{,}15^t}{\ln 1{,}15} + 641\,000$$

Viie aasta pärast

$$K(5) = 120\,000\frac{1{,}15^5}{\ln 1{,}15} + 641\,000 = 2\,370\,000$$

Vastus: Viie aasta pärast on põhikapital kasvanud 2,4 milj. kroonini.

ÜLESANDED

3.4 Piirkulu on $MC = 25 + 30q - 9q^2$ ja püsikulu on 55 ühikut. Leida

a) kogukulu;

b) keskmine kulu ühiku kohta.

3.5 Piirtulu on $MR = 60 - 2q - 2q^2$. Leida

a) kogutulu;

b) nõudlusfunktsioon.

3.6 Jalgrattaid tootva firma analüütikute prognoosi järgi muutub nõudlus ajas, nii et t kuu pärast ostetakse ühes kuus $5000 + 60\sqrt{t}$ jalgratast hinnaga $80 + 3\sqrt{t}$ dollarit tükk. Kui suur on jalgrataste müügist saadav kogutulu 16 kuu jooksul?

3.7 Analüüs näitab, et toote A piirkulu on $6q + 1$ krooni toote kohta, kui tootmismaht on q. Esimese tooteühiku tootmisel on kogukulu (koos püsikuludega) 130 kr. Kui suur on kogukulu esimese 10 tooteühiku tootmisel?

3.8 Firma X piirkasum on $100 - 2q$ dollarit tooteühiku kohta, kui tootmismaht on q. Kui 10 ühiku tootmisel on kasum 700 dollarit, milline on firma maksimaalne võimalik kasum?

3.9 Puhasinvesteeringu muutumist ajas kirjeldab funktsioon $I(t) = 140t^{3/4}$ ja põhikapitali suurus ajahetkel $t = 0$ on 150 ühikut. Leida põhikapitali muutust kirjeldav funktsioon.

3.10 Puhasinvesteeringu muutumist ajas kirjeldab funktsioon $I(t) = 60t^{1/3}$ ja põhikapitali suurus ajahetkel $t = 1$ on 85 ühikut. Leida põhikapitali muutust kirjeldav funktsioon.

3.11 Tarbimine C sõltub sissetulekust Y. Piirtarbimine (*marginal propensity to consume*) on tarbimise muutus sissetuleku ühikulise suurenemise korral (tarbimise muutumise kiirus): $MPC = \frac{dC}{dY}$. Leida tarbimisfunktsioon, kui piirtarbimine on 0,8 ühikut ja sissetuleku puudumisel on tarbimine 40 ühikut.

3.12 Linnas A on rahvaarvu kasvamise kiirus $4 + 5t^{2/3}$ elanikku kuus, kus t on kuude arv alates praegusest. Kui praegu on linna elanike arv 10 000, kui suurt rahvaarvu prognoositakse 8 kuu pärast?

VASTUSED **3.4** a) $TC = 25q + 15q^2 - 3q^3 + 55$, b) $AC = 25 + 15q - 3q^2 + \frac{55}{q}$ **3.5**a) $TR = 60q - q^2 - \frac{2}{3}q^3$, b) $p = 60 - q - \frac{2}{3}q^2$. **3.6** 7 267 840 dollarit **3.7** 436 kr **3.8** \$2300 **3.9** $K = 80t^{7/4} + 150$. **3.10** $K = 45t^{4/3} + 40$ **3.11** $C = 0{,}8Y + 40$. **3.12** 10128 elanikku.

Muutuja vahetus määramata integraalis

Liitfunktsiooni tuletise võtmise reegli järgi, kui $y=f(u)$ ja $u=f(x)$, siis

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Näiteks funktsiooni $y(x)=(x^2+3x+5)^9$ diferentseerimiseks võib võtta $y(u)=u^9$ ja $u(x)=x^2+3x+5$. Nüüd

$$\frac{dy}{dx}=9u^8\frac{du}{dx}=9(x^2+3x+5)^8(2x+3)$$

Liitfunktsiooni tuletis on korrutis, kus esimest tegurit võib vaadelda mitte tuletisena, vaid lihtsalt mingi funktsioonina abimuutujast *u:*

$$g(u)\frac{du}{dx}$$

Kui integraalialuse avaldise saab esitada sellise korrutisena, on võimalik liitfuntsiooni diferentseerimise reeglit kasutada vastupidi, integraali leidmisel. Selleks kasutatakse seost

$$\frac{du}{dx}dx=du$$

Muutuja vahetus määramata integraalis

$$\int g(u)\frac{du}{dx}dx=\int g(u)\,du$$

Integreerimine üle muutuja *x* asendatakse integreerimisega üle muutuja *u*.

Näiteks, kui on vaja leida integraali $\int 9(x^2+3x+5)^8(2x+3)dx$, siis

$$\int \overbrace{9(\underbrace{x^2+3x+5}_{u})^8}^{g(u)}\overbrace{\underbrace{(2x+3)}_{\frac{du}{dx}}}^{du}dx=\int g(u)\frac{du}{dx}dx=\int g(u)\,du+c=\int 9u^8du=u^9+c=(x^2+3x+5)^9+c$$

Muutujavahetus võimaldab integraalialust avaldist tihti lihtsustada ja seejärel kasutada tabeliintegraale.
Muutuja vahetust saab kasutada, kui

- integraalialune avaldis on kahe teguti korrutis

ja

- üks tegur on teises teguris sisalduva avaldise tuletis.

NÄIDE 3.8. Muutuja vahetus määramata integraalis. Leida $\int x^3 e^{x^4+2} dx$.

Valime $u = x^4 + 2$. Võtem tuletise $\frac{du}{dx} = 4x^3$ ja avaldame $dx = \frac{du}{4x^3}$. Nüüd

$$\int x^3 e^{x^4+2} dx = \int x^3 e^u \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4} e^u + c = \frac{1}{4} e^{x^4+2} + c$$

ÜLESANDED

3.13 Leida järgmised integraalid ja kontrollida saadud tulemust diferentseerimise teel.

a) $\int (2x+6)^5 dx$ b) $\int \sqrt{4x-1}\, dx$ c) $\int e^{1-x} dx$

d) $\int x e^{x^2} dx$ e) $\int t(t^2+1)^5 dt$ f) $\int x^2 (x^3+1)^{3/4} dx$

g) $\int \frac{2y^4}{y^5+1} dy$ h) $\int (x+1)(x^2+2x+5)^{12} dx$ i) $\int \frac{x^2}{(4x^3+7)^2} dx$

3.14 Leida järgmised integraalid ja kontrollida saadud tulemust diferentseerimise teel.

a) $\int \frac{3x^4+12x^3+6}{x^5+5x^4+10x+12} dx$ b) $\int \frac{3u-3}{(u^2-2u+6)^2} du$ c) $\int \frac{\ln 5x}{x} dx$

d) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ e) $\int \frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$ f) $\int \frac{6x^2+4x+10}{(x^3+x^2+5x)^3} dx$

3.15 Leida funktsioon, mille graafiku puutuja tõus igas punktis on $x\sqrt{x^2+5}$ ja graafik läbib punkti (2; 10).

3.16 Peale istutamist kasvas puu kiirusega $1 + \frac{t}{t^2+1}$ meetrit aastas, kus *t* on aeg aastates. Kahe aasta pärast oli puu kõrgus 5 meetrit. Kui kõrge oli puu istutamise ajal?

3.17 Prognoositakse, et *t* aasta pärast kasvab N linna rahvaarv kiirusega $e^{0,02t}$ miljonit elanikku aastas. Kui praegu on elanike arv 50 miljonit, kui suur oleks see siis 10 aasta pärast?

3.18 Los Angeleses oli kell 7.00 osooni kontentratsioon õhus $L(t)$=0,25 osakest miljoni kohta (*ppm - parts per million*). Ilmateade järgmiseks 12 tunniks ennustab, et *t* tunni pärast muutub osooni kontsentratsioon kiirusega $L'(t) = \frac{0,24 - 0,03t}{\sqrt{36+16t-t^2}}$ osakest miljoni kohta tunnis.

a) Avaldada osooni kontsentratsioon funktsioonina ajast *t*.

b) Millal saabub osooni kontsentratsiooni maksimum ja kui suur see on?

3.19 Tööpingi väärtuse kahanemise kiirus sõltub tööpingi vanusest. Kui tööpingi vanus on *t* aastat, siis väärtus muutub kiirusega $-960e^{-\frac{t}{5}}$ krooni aastas.

a) Avaldada tööpingi väärtuse sõltuvus tööpingi vanusest ja algväärtusest.

b) Kui algselt oli tööpingi väärtuseks 5200 krooni, milline on selle väärtus 10 aasta pärast.

3.20 Ühes USA piirkonnas maksab broileri kilo 3$. Prognoos ütleb, et *t* nädala pärast muutub hind kiirusega $3\sqrt{t+1}$ senti nädalas. Kui palju maksab broiler 8 nädala pärast?

VASTUSED **3.13** a) $\frac{1}{12}(2x+6)^6 + c$; b) $\frac{1}{6}(4x-1)^{3/2} + c$; c) $-e^{1-x} + c$; d) $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$; e) $\frac{1}{12}(t^2+1)^6 + c$; f) $\frac{4}{21}(x^3+1)^{7/4} + c$; g) $\frac{2}{5}\ln|x^5+1| + c$; h) $\frac{1}{26}(x^2+2x+5)^{13} + c$; i) $-\frac{1}{12(4x^3+7)} + c$. **3.14** a) $\frac{3}{5}\ln|x^5+5x^4+10x+12| + c$; b) $-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{u^2-2u+6}\right) + c$; c) $\frac{1}{2}(\ln 5x)^2 + c$; d) $-\frac{1}{\ln x} + c$; e) $\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]^2 + c$; f) $-\frac{1}{(x^3+x^2+5x)^2} + c$

3.15 $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + 1$ **3.16** 2,2 meetrit **3.17** 61,07 miljonit **3.18** a) $L(t) = 0,03\sqrt{-t^2+16t+36} + 0,07$ b) Kell 15.00; 0,37 ppm. **3.19** a) $V(t) = 4800e^{-\frac{t}{5}} - 4800 + V_0$, b) 1049,61 kr. **3.20** 3,52 $/kg.

Ositi integreerimine

Üks laialt kasutatav integreerimise võte, mis võimaldab komplitseeritud integraali leidmist taandada lihtsama integraali leidmisele, on ositi integreerimine. Ositi integreerimise valemi saamiseks lähtutakse korrutise diferentseermise valemist.

Olgu $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ diferentseeruvad funktsioonid mingis piirkonnas *X*, siis ka korrutis *uv* on diferentseeruv selles piirkonnas, kusjuures korrutise diferentseerimise reegli järgi

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

Selle põhjal

$$d(uv) = du\, v + u\, dv$$

Avaldame siit korrutise $u\, dv$

$$u\, dv = d(uv) - du\, v = d(uv) - v\, du$$

Kui nüüd on vaja leida komplitseeritud integraali, mida saab esitada kujul $\int u\, dv$, siis

$$\int u\, dv = \int d(uv) - \int v\, du = uv - \int v\, du$$

Ositi integreerimine

Kui $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on diferentseeruvad funktsioonid ning leidub $\int v\, du$, siis leidub ka $\int u\, dv$, kusjuures

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

NÄIDE 3.9. Ositi integreerimine. Leida integraal $\int \ln x\, dx$.

Valides $u = \ln x$ ja $dv = dx$, saame $du = \frac{dx}{x}$ ja $v = \int dx = x$ (intergreermiskonstanti pole vaja siin lisada, see lisatakse lõpptulemusele). Nüüd ositi integreerimise valemi järgi

$$\int \ln x\, dx = uv - \int v\, du = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

NÄIDE 3.10. Ositi integreerimine. Leida integraal $\int x e^x dx$.

Valides $u = x$ ja $dv = e^x dx$, saame $du = dx$ ja $v = \int e^x dx = e^x$. Nüüd ositi integreerimise valemi järgi

$$\int x e^x dx = uv - \int v\, du = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

NÄIDE 3.11. Ositi integreerimine. Leida integraal $\int x^2 \cos x\, dx$

Valides $u = x^2$ ja $dv = \cos x\, dx$, saame $du = 2x\, dx$ ja $v = \int \cos x\, dx = \sin x$. Nüüd ositi integreerimise valemi järgi

$$\int x^2 \cos x dx = uv - \int v\, du = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx$$

Viimase integraali leidmiseks kasutame jällegi ositi integreerimise valemit. Valides $u = x$ ja $dv = \sin x\, dx$, saame $du = dx$ ja $v = \int \sin x\, dx = -\cos x$. Nüüd ositi integreerimise valemi järgi

$$\int x \sin x\, dx = uv - \int v\, du = -x\cos x - \int(-\cos x)\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c$$

Asetades saadud tulemuse eelmisesse valemisse, võime kirjutada

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x + c) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x - 2c = \sin x(x^2 - 2) + 2x\cos x + c^*$$

kus $c^* = -2c$ on samuti suvaline konstant.

ÜLESANDED

3.21 Leida integraal, kasutades ositi integreerimist.

a) $\int x(x+1)^8 dx$ b) $\int (1-x)\,e^{x} dx$ c) $\int t \ln 2t\, dt$

d) $\int x\,e^{-x} dx$ e) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ f) $\int x^3 e^{x^2} dx$

g) $\int 6x e^{x+7} dx$ h) $\int 16x\,e^{-(x+9)} dx$ i) $\int x^2 e^{2x} dx$

3.22 Leida integraal, kasutades ositi integreerimist

a) $\int 15x(x+4)^{3/2} dx$ b) $\int \frac{2x}{(x-8)^3} dx$ c) $\int \frac{5x}{(x-1)^2} dx$

3.23 Leida funktsioon, mille graafikule suvalises punktis tõmmatud puutuja tõus on $(x+1)\,e^{-x}$ ja mille graafik läbib punkti (1; 5).

3.24 t sekundit peale liikuma hakkamist on objekti kiirus $t\,e^{-t/2}$ meetrit sekundis. Avaldada läbitud teepikkus funktsioonina ajast.

3.25 Kohalik omavalitsus algatas kampaania raha kogumiseks heategevusfondi. t nädala möödudes laekus fondi $2000\,t\,e^{-t/2}$ krooni nädalas. Leida, kui palju raha laekus fondi esimese 5 nädala jooksul.

3.26 Kasutades ositi integreerimist, näidata et

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$$

3.27 Kasutades ositi integreerimist, näidata et

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} dx, \quad \text{kus } a, n = const$$

VASTUSED

3.21 a) $\frac{1}{90}(x+1)^9(9x-1)+c$, b) $(2-x)e^{x}+c$, c) $\frac{1}{2}t^2\left(\ln 2t - \frac{1}{2}\right)+c$, d) $-(x+1)e^{-x}+c$, e) $-\frac{1}{x}(\ln x + 1)+c$,
f) $\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+c$, g) $6xe^{x+7}-6e^{x+7}+c$, h) $-16xe^{-(x+9)}-16\,e^{-(x+9)}+c$, i) $\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$.

3.22 a) $6x(x+4)^{5/2}-\frac{12}{7}(x+4)^{7/2}+c$, b) $\frac{-x}{(x-8)^2}-\frac{1}{x-8}+c$, c) $\frac{-5x}{x-1}+5\ln|x-1|+c$.

3.23 $f(x) = -(x+2)\,e^{-x}+5+3\,e^{-1}$. **3.24** $s(t) = -2(t+2)\,e^{-t/2}+4$. **3.25** 5701 kr.

Integraalide tabelid

Erinevate integraalide leidmiseks on abiks integraalide tabelid. Integraalide tabelites tähistavad tähed a, b ja n konstante. Tabeleid kasutatakse koos muutuja vahetuse ja ositi integreerimise meetoditega.

NÄIDE 3.12. Integraalide tabelite kasutamine. Leida $\int \frac{1}{x(3x-6)} dx$.

Asendades valemis 6 konstandi $a = -6$ ja $b = 3$, saame

$$\int \frac{1}{x(3x-6)} dx = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{3x-6}\right| + c$$

Integraalide tabelid

Integraalid, mis sisaldavad avaldist $\boldsymbol{a+bx}$

1. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{a+bx}=\frac{1}{b^2}[a+bx-a\ln|a+bx|]+c$

2. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{a+bx}=\frac{1}{2b^3}[(a+bx)^2-4a(a+bx)+2a^2\ln|a+bx|]+c$

3. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a+bx}+\ln|a+bx|\right]+c$

4. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx}+c$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|+c,\ a>0$

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(a+bx)}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|+c$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(a+bx)}=\frac{-1}{a}\left[\frac{1}{x}+\frac{b}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|\right]+c$

8. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(a+bx)^2}=\frac{-1}{a^2}\left[\frac{a+2bx}{x(a+bx)}+\frac{2b}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|\right]+c$

Integraalid, mis sisaldavad avaldist $\boldsymbol{\sqrt{a^2+x^2}}$

9. $\displaystyle\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+c$

10. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+c$

11. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{-1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{x}\right|+c$

12. $\displaystyle\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+c$

13. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}\,| + c$

Integraalid, mis sisaldavad avaldist $\sqrt{\boldsymbol{a^2-x^2}}$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}+a}{x}\right| + c$

15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + c$

16. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

17. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + c$

Integraalid, mis sisaldavad avaldist $\sqrt{\boldsymbol{x^2-a^2}}$

18. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

19. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = \frac{-\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

Integraalid, mis sisaldavad avaldisi $\boldsymbol{e^{ax}}$ ja $\mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}$

21. $\int x e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + c$

22. $\int \ln x\,dx = x\ln|x| - x + c$

23. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + c$

24. $\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + c,\ n \neq -1$

Taandamisvalemid

25. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} dx$

26. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$

27. $\int x^n \sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{a(2n+3)}\left[x^n (ax+b)^{3/2} - nb\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\, dx\right],\ n \neq \frac{3}{2}$

NÄIDE 3.13. Integraalide tabelite kasutamine. Leida $\int \frac{1}{6-3x^2} dx$.

Kui x^2 ees olev kordaja oleks 3 asemel 1, saaksime kasutada valemit (16). Seega oleks sobiv integraalialune avaldis kirjutada kujul

$$\frac{1}{6-3x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-x^2}\right)$$

Kasutades nüüd valemit (16), kusjuures $a = \sqrt{2}$

$$\int \frac{1}{6-3x^2} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2-x^2} dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + c = \frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + c$$

NÄIDE 3.14. Integraalide tabelite kasutamine. Leida integraal $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}} dx$

Et kasutada valemit (20), kirjutame integraalialuse avaldise ümber

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(x^2-\frac{9}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}}$$

Võttes nüüd $a^2 = \frac{9}{4}$, saame

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}} dx = \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-\frac{9}{4}}\right| + c$$

NÄIDE 3.15. Integraalide taandamisvalemite kasutamine. Leida integraal $\int x^3 e^{5x} dx$.

Kasutades valemit (26), kus n=3 ja a=5, saame

$$\int x^3 e^{5x} dx = \frac{1}{5}x^3 e^{5x} - \frac{3}{5}\int x^2 e^{5x} dx$$

Kasutades sama valemit veel kord, võttes nüüd n=2 , leiame paremal pool oleva integraali

$$\int x^2 e^{5x} dx = \frac{1}{5}x^2 e^{5x} - \frac{2}{5}\int x e^{5x} dx$$

Paremal pool oleva integraali leidmiseks tuleb veel kord rakendada valemit 26 , võttes n=1:

$$\int xe^{5x}dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right) + c$$

Võttes kõik tulemused kokku, saame

$$\int x^3e^{5x}dx = \frac{1}{5}x^3e^{5x} - \frac{3}{5}\left[\frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx\right] =$$
$$= \frac{1}{5}x^3e^{5x} - \frac{3}{25}x^2e^{5x} + \frac{6}{25}\left[\frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right)\right] + c =$$
$$= \left[\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{125}x - \frac{6}{625}\right]e^{5x} + c$$

ÜLESANDED

3.28 Leida alljärgnevad integraalid, kasutades integraalide tabeleid.

a) $\int \frac{x\,dx}{3-5x}$ b) $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ c) $\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^2}dx$

d) $\int \frac{dx}{(9+2x^2)^{3/2}}$ e) $\int \frac{dx}{x(2+3x)}$ f) $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4-5t}}$

g) $\int \frac{du}{16-3u^2}$ h) $\int we^{-3w}dw$ i) $\int (\ln x)^3 dx$

j) $\int x^2e^{6x}dx$ k) $\int x^2\sqrt{5+7x}\,dx$ l) $\int t^3\sqrt{1+2t}\,dt$

VASTUSED

3.28 a) $\frac{1}{25}(3-5x-3\ln|3-5x|)+c$; b) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|+c$; c) $2\left(-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}\right|\right)+c$;
d) $\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+2x^2}}+c$; e) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+3x}\right|+c$; f) $-\frac{2}{75}(5t+8)\sqrt{4-5t}+c$; g) $\frac{\sqrt{3}}{24}\ln\left|\frac{4\sqrt{3}+3u}{4\sqrt{3}-3u}\right|+c$; h) $-\frac{1}{9}(3w+1)e^{-3w}+c$
i) $x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6x\ln x-6x+c$; j) $e^{6x}\left(\frac{1}{108}-\frac{x}{18}+\frac{x^2}{6}\right)+c$; k) $\sqrt{5+7x}\left[\frac{400}{7203}-\frac{40x}{1029}+\frac{2x^2}{49}+\frac{2x^3}{7}\right]$;
l) $\frac{1}{9}(2t+1)^{\frac{3}{2}}\left(t^3-\frac{3}{7}t^2+\frac{6}{5}t-2\right)$

Mitteelementaarsed integraalid

Mitmete elementaarfunktsioonide algfunktsioonid ei ole elementaarfunktsioonid ning vastavaid funktsioone ei saa tavaliste meetoditega integreerida. Selliste funktsioonide integraale nimetataks **mitteelementaarseteks integraalideks**.
Mõningad neist

$\int e^{-x^2}dx$ $\int \frac{dx}{\ln x}$ $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$

$\int \frac{e^x}{x}dx$ $\int \ln(\sin x)\,dx$ $\int \frac{\sin x}{x}dx$

$\int (\sin x)^2 dx$ $\int \sqrt{\sin x}\,dx$ $\int e^{\arctan x}dx$

Kõigi nende integraalide korral on algfunktsioon mingi funktsioon, mis ei ole avaldatav lõpliku arvu elementaarfunktsioonide kombinatsioonina.
Näiteks funktsiooni e^{-x^2} algfunktsiooni nimetatakse **Gaussi funktsiooniks** ja seda kasutatakse väga laialdaselt statistikas ja tõenäosusteoorias normaaljaotuse uurimisel.

Määratud integraal

NÄIDE 3.16. Määratud integraal. Rahvaarvu muutus

Analüüs näitab, et teatud piirkonna rahvaarv kasvab kiirusega $2+6\sqrt{t}$ elanikku kuus, kus t on kuude arv alates praegusest. Kui palju kasvab rahvaarv järgmise 4 kuuga?

Olgu $N(t)$ rahvaarvu sõltuvus ajast. Rahvaarvu muutumise kiirus on siis $\frac{dN}{dt}=2+6\sqrt{t}$, mida integreerides saame rahvaarvu sõltuvuse ajast:

$$N(t)=\int(2+6\sqrt{t})\,dt=2t+4t^{3/2}+c$$

Rahvaarvu muutus järgmise 4 kuu jooksul on

$$N(4)-N(0)=(2\cdot 4+4\cdot 4^{3/2}+c)-(2\cdot 0+4\cdot 0^{3/2}+c)=(40+c)-(0+c)=40$$

Vastus: Järgmise 4 kuu jooksul kasvab rahvaarv 40 inimese võrra.

Olgu meil teada mingi suuruse $F(x)$ muutumise kiirus $f(x)=\frac{dF}{dx}$ ja soovime leida, kui palju muutub F, kui argument x muutub vahemikus $[a;b]$. Selleks on meil vaja leida integraal $F(x)=\int f(x)\,dx$ ning seejärel muutus $F(b)-F(a)$. Seda vahet nimetatakse **määratud integraaliks** ja tähistatakse $\int_a^b f(x)\,dx$. Argumendi väärtusi a ja b nimetatakse **integreerimisradadeks** .

Määratud integraal

Olgu funktsioon $f(x)$ integreeruv lõigul $[a;\, b]$ ja leidugu tal sellel lõigul algfunktsioon $F(x)$. Siis määratud integraal radades a-st b-ni

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

Seos on tuntud ka **Newton-Leibniz'i valemina.**

Määratud integraali arvutamisel kasutatakse vahe $F(b)-F(a)$ tähistamisel tihti tähistust $F(x)\Big|_a^b$ või tähistust $\Big[F(x)\Big]_a^b$

NÄIDE 3.17. Määratud integraal. Kulude muutus

Kulude analüüs näitab, et tootmiskoguse q korral on piirkulu $3(q-4)^2$ krooni ühiku kohta. Kui palju suurenevad kulud, kui tootmismaht suureneb 6 ühikult 10 ühikuni?

Olgu meil $C(q)$ kogukulud q ühiku tootmisel. Piirkulu on siis $MC=\frac{dC}{dq}=3(q-4)^2$ ja kulude muutus toomismahu muutudes 6 ühikult 10 ühikuni

$$C(10)-C(6)=\int_6^{10}3(q-4)^2\,dq=(q-4)^3\Big|_6^{10}=(10-4)^3-(6-4)^3=216-8=208$$

Vastus: Tootmismahu suurenemisel 6 ühikult 10 ühikuni suurenevad kulud 208 krooni.

NÄIDE 3.18. Määratud integraal. Nõutava koguse muutus

Turuanalüüs näitab, et bensiini nõutav kogus kasvab eksponentsiaalselt 5% aastas. Kui praegu on nõutav kogus 4 miljonit liitrit aastas, kui palju suureneb nõutav kogus järgmise 3 aasta jooksul?

Olgu $q\,(t)$ nõutava koguse sõltuvus ajast t, kus aega mõõdetakse aastates alates praegusest. Nõudluse muutumise kiirus on siis $\frac{dq}{dt} = 4e^{0,05t}$. Järelikult järgmise 3 aasta jooksul kasvab nõutav kogus

$$q(3) - q(0) = \int_0^3 4e^{0,05t}dt = 80e^{0,05t}\Big|_0^3 = 80(e^{0,15} - 1) = 12{,}95$$

Vastus: Järgmise 3 aasta jooksul kasvab bensiini nõutav kogus 12,95 miljoni liitri võrra.

ÜLESANDED

3.29 Leia järgmised määratud integraalid

a) $\int_0^1 (x^4 - 3x^3 + 1)\,dx$ b) $\int_0^{-1} (3x^5 - 3x^2 + 2x - 1)\,dx$ c) $\int_2^5 (2 + 2t + 3t^2)\,dt$

d) $\int_1^9 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$ e) $\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ f) $\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} (e^t - e^{-t})\,dt$

g) $\int_{-1}^{-3} \frac{t+1}{t^3}\,dt$ h) $\int_0^6 x^2(x-1)\,dx$ i) $\int_1^2 (2x-4)^5\,dx$

3.30 Analüüs näitab, et t kuu pärast kasvab maakonna rahvaarv kiirusega $5 + 3t^{2/3}$ elanikku kuus. Kui palju kasvab rahvaarv järgmise 8 kuu jooksul?

3.31 t minutit peale liikuma hakkamist on objekti kiirus $5 + 2t + 3t^2$ meetrit sekundis. Mitu meetrit läbib objekt teise minuti jooksul?

3.32 Tööpingi turuväärtus kahaneb 10 aasta jooksul, kusjuures väärtuse kahanemise kiirus muutub. Kui tööpinki on kasutatud t aastat, siis väärtus kahaneb kiirusega $220(t-10)$ krooni aastas. Kui palju kahaneb tööpingi väärtus teise aasta jooksul?

3.33 Anaüüs näitab, et t tundi peale uste avamist kell 9.00 siseneb kaubamajja $-4(t+2)^3 + 54(t+2)^2$ ostjat tunnis. Mitu ostjat siseneb kaubamajja kella 10 ja 12 vahel?

3.34 Tootmismahu q korral on ettevõtte piirkulu on $6(q-5)^2$ krooni ühiku kohta. Kui palju suurenevad kulud, kui tootmismaht kasvab 10 ühikult 13 ühikuni?

3.35 Naftapuuraugu omaniku hinnangul võimaldab puurauk pumbata 2 aasta vältel 400 barrelit toornaftat kuus. Praegu on toornafta hint 18$ barreli eest ja hind peaks tõusma keskmiselt 3 senti kuus. Kui suur on puuraugust saadav kogutulu?

3.36 Prognoosi järgi suureneb talupidaja viljasaak iga päevaga $0{,}3t^2 + 0{,}6t + 1$ ts võrra. Kui palju suureneb saagi koguväärtus järgmise 5 päeva jooksul, kui teravilja hind on konstantselt 20 krooni tsentneri kohta?

3.37 Analüütikud prognoosivad, et nafta nõudlus kasvab eksponentsiaalselt kiirusega 10% aastas. Kui praegune nõudlus on 30 miljardit barrelit aastas, kui palju tuleks naftat toota järgmise 10 aasta jooksul?

3.38 Toote nõudlus kasvab prognoosi kohaselt eksponentsiaalselt kiirusega 2% aastas. Praegune nõudlus on 5000 ühikut aastas. Toote hinna muutust pole ette näha, see jääb tasemele 400 krooni ühiku eest. Kui suurt tulu võib tootja oodata järgmise kahe aasta jooksul?

3.39 t tundi peale tööpäeva algust toodab keskmine tööline $100te^{-0,5t}$ tk tunnis. Mitu toodet toodab tööline, kes tuleb tööle kell 8.00, kella 10-st kuni kella 12-ni?

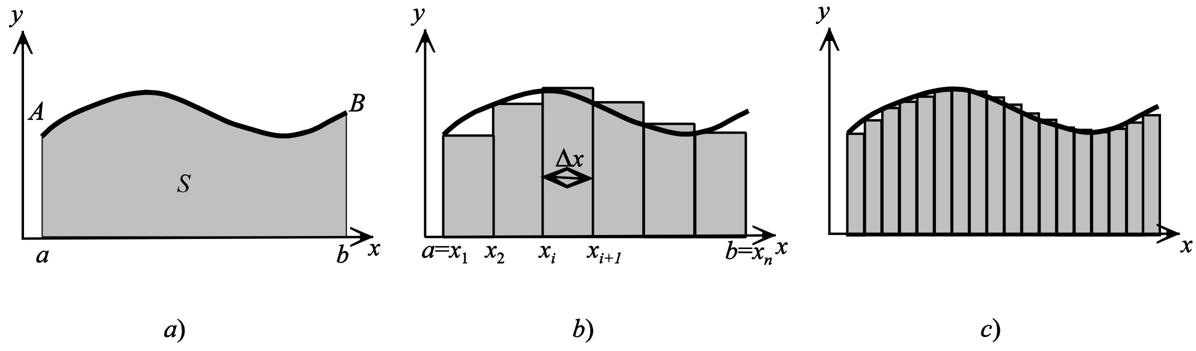
VASTUSED

3.29 a) $\frac{9}{20}$; b) $\frac{7}{2}$; c) 144; d) $\frac{40}{3}$; e) $\frac{8}{3} + \ln 3 \approx 3{,}7653$; f) 0; g) $-\frac{2}{9}$; h) 252; i) $-\frac{16}{3}$. **3.30** 98 elanikku. **3.31** 900 meetrit. **3.32** 1870 kr. **3.33** 1220. **3.34** 774 kr. **3.35** 176256 $. **3.36** 500 kr. **3.37** 515,5 miljardit barrelit. **3.38** 4,081 milj. kr. **3.39** ca 132 tk

Määratud integraal kui kõvera-alune pindala

Olgu meil funktsioon $y = f(x)$, mis on pidev lõigul [a; b], s.t funktsioonil pole selles piirkonnas katkevuspunkte. Leiame selle funktsiooni graafiku alla jääva kujundi *abBA* pindala S (joonis 4a). Jagame lõigu [a; b] n võrdseks osaks laiusega Δx ja tähistagu x_i i-nda lõigu alguspunkti. Seejärel joonistame n ristkülikut, nii et iga i-nda ristküliku alus oleks vastav lõik alguspunktiga x_i ja ristküliku kõrguseks vastavalt $y_i = f(x_i)$ (joonis 4b).

i-nda ristküliku pindala on $S_i = f(x_i)\Delta x$ ja kujundi *abBA* pindala on ligikaudu võrdne ristkülikute pindalade summaga:



Joonis 4 Kõvera alla jääva pindala lähendamine ristkülikutega

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Kui me suurendame ristkülikute arvu *n*, siis ristkülikud muutuvad kitsamaks ja lähendus paraneb (joonis 4c). Kui $n \to \infty$, siis ristkülikute laius $\Delta x \to 0$ ja ristkülikute summaarne pindala läheneb kujundi *abBA* pindalale, $\sum_{i=1}^{n} S_i \to S$

Piirväärtust $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **määratud integraaliks** rajades *a*-st *b*-ni:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Üleminekul piirile asendatakse

- summeerimine integreerimisega, $\sum \to \int$;
- lõplikud muudud lõpmatult väikese muuduga, $\Delta x \to dx$
- diskreetsed *f* väärtused pideva funktsiooniga, $f(x_i) \to f(x)$

Summa $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ on tuntud ka **Riemanni summana** ja määratud integraali nimetatakse seetõttu ka **Riemanni integraaliks**.

Määratud integraali tähistuse võttis kasutusele prantsuse füüsik ja matemaatik *Fourier* (1768-1830), kusjuures integraali sümbol $\int$ on nähtavasti saadud ladinakeelse sõna “Summa” algtähe S stiliseerimisel.

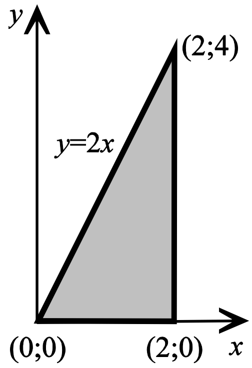
Määratud integraali geomeetriline tähendus: integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ on võrdne sellise kõverjoonelise trapetsi pindalaga, mida piiravad sirged $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ja joon $y = f(x)$.

NÄIDE 3.19. Pindala leidmine määratud integaali abil.
Olgu meil kolmnurk, mis on piiratud sirgetega $y = 0$, $x = 2$ ja joonega $y = 2x$ (joonis 5). Leiame selle kolmnurga pindala, kasutades määratud integraali. Arvestame, et selle kolmnurga pindala on joone $y = 2x$ alla jääv pindala vahemikus $x = 0$ ja $x = 2$. Seega integreerimisradadeks on 0 ja 2:

$$S = \int_0^2 2x\,dx = x^2\Big|_0^2 = 4$$

Teiselt poolt võib pindala leida, kasutades valemit kolnurga pindala leidmiseks:

$$S = \frac{\text{alus} \cdot \text{kõrgus}}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$



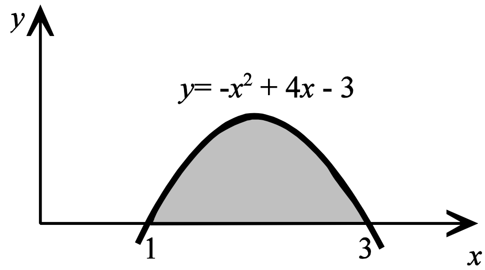
Joonis 5

NÄIDE 3.20. Pindala leidmine määratud integraali abil
Leida sellise kujundi pindala, mis on piiratud kõveraga $y = -x^2 + 4x - 3$ ja x teljega (joonis 6).
Leiame punktid, kus kõver lõikab x telge. Nendes punktides $y = 0$ ja järelikult tuleb lahendada ruutvõrrand

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Kasutades taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm 1, \quad x_1 = 1;\ x_2 = 3.$$



Joonis 6

Nüüd, kasutades määratud integraali

$$S = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{4}{3}$$

ÜLESANDED
3.40 Leida kujundi R pindala, kui
- a) R on kolmnurk, mis on piiratud joonega $y = 4 - 3x$ ja koordinaattelgedega;
- b) R on ristkülik, mille tipud asuvad punktides (1; 0), (-2; 0), (-2; 5), (1; 5);
- c) R on piiratud joonega $y = \sqrt{x}$, joontega $x = 4$ ja $x = 9$ ning x-teljega.

VASTUSED
3.40 a) $\frac{8}{3}$; b) 15; c) $\frac{38}{3}$.

Integreerimisvõtted määratud integraali korral.

NÄIDE 3.21. Muutuja vahetus määratud integraalis. Leida integraal. $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx$

Kasutame muutjavahetust ja võtame uueks muutujaks $u = x^2 + 1$. Siis $du = 2x\,dx$ ja

$$\int 8x(x^2+1)^3\,dx = \int 4u^3\,du = u^4$$

Integreerimisrajad 0 ja 1 olid suuruse x väärtused. On võimalik tagasi minna muutujale x, arvestades et $u^4 = (x^2+1)^4$ ja otsitav määratud integraal sellisel juhul

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx = (x^2+1)^4\Big|_0^1 = 16 - 1 = 15$$

Teine võimalus on teisendada määratud integraali rajasid. Arvestades et $u = x^2 + 1$, saame et $u(0) = 1$ ja $u(1) = 2$ ning võime määratud integraali väärtuse leida muutujale x tagasi minemata:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx = \int_1^2 4u^3\,du = u^4\Big|_1^2 = 2^4 - 1^4 = 16 - 1 = 15$$

Muutuja vahetus määratud integraalis

$$\int_a^b g(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du$$

NÄIDE 3.22. Muutuja vahetus määratud integraalis. Leida integraal $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Võtame uueks muutujaks $u = \ln x$. Siis $du = \frac{1}{x}\,dx$, $u(1) = \ln 1 = 0$ ja $u(e) = \ln e = 1$. Nüüd

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

Ositi integreerimine määratud integraalis

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

NÄIDE 3.23. Ositi integreerimine määratud integraalis. Leida integraal $\int_1^e x\ln x\,dx$.

Kuna tegur x on lihtsalt integreeritav ja tegur $\ln x$ lihtsustub tuletise võtmisel, on kasulik proovida ositi integreerimist. Olgu $dv = x\,dx$, siis $v = \frac{1}{2}x^2$. Teine tegur $u = \ln x$ ja vastavalt $du = \frac{1}{x}dx$. Nüüd ositi integreerimise valemi põhjal

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e = = \left(\frac{1}{2}e^2\ln e - \frac{1}{4}e^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\ln 1 - \frac{1}{4}\cdot 1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

ÜLESANDED

3.41 Leida järgmised määratud integraalid

a) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6t+1}}\,dt$ b) $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^3}\,dx$ c) $\int_0^1 (t^3+t)\sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt$

d) $\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1}\,dx$ e) $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}\,dx$ f) $\int_1^2 (t+1)(t-2)^9\,dt$

g) $\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ h) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx$ i) $\int_0^{10} (2x+1)e^{0,2x} dx$

j) $\int_2^5 \frac{3x}{(x+1)^2} dx$ k) $\int_1^3 \frac{4x}{(x+2)^3} dx$ l) $\int_1^3 5xe^{x+2} dx$

3.42 Firma analüütikud on kindlaks teinud, et tootmismahu q korral on piirtulu $MR(q) = 7 - 3q - 4q^2$ tuh kr ühiku kohta ja piirkulu $MC(q) = 5 + 2q$ tuh krooni ühiku kohta. Kuidas muutub kasum, kui tootmismaht tõuseb 5 ühikult 9 ühikuni?

3.43 Firma analüütikud on kindlaks teinud, et tootmismahu q korral vahemikus 5-st 13-ni on piirtulu $MR(q) = \frac{11-q}{\sqrt{14-q}}$ tuh kr ühiku kohta ja piirkulu $MC(q) = 2 + q + q^2$ tuh krooni ühiku kohta. Kuidas muutub kasum, kui tootmismaht tõuseb 6 ühikult 10 ühikuni?

VASTUSED

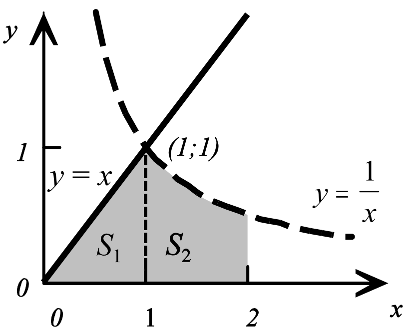
3.41 a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{77}{1944}$; c) $\frac{7}{6}$; d) $3\ln 2$; e) e; f) $-\frac{23}{110}$; g) $\frac{8}{3}$; h) ln 2; i) 451,398; j) $\ln 8 - \frac{1}{2} \approx 1,5796$; k) $\frac{56}{225}$; l) $10e^5 \approx 1484$.
3.42 väheneb 937,3 tuh kr **3.43** väheneb 296 tuh kr.

Pindalade leidmine määratud integraali abil

Vaatleme keerulisema piirkonna pindala leidmist määratud integraali abil.

NÄIDE 3.24. Pindala leidmine määratud integraali abil. Leida sellise piirkonna pindala, mis asub koordinaatteljestiku I veerandis joone $y = \frac{1}{x}$ all ning on piiratud sirgetega $y = x$; $y = 0$ ja $x = 2$ (joonis 7).
Otsitavat pindala saab leida kahe pindala summana, $S = S_1 + S_2$. Pindala S_1 on vahemikus [0; 1] joone $y = x$ alla jääv pindala:

$$S_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$



Joonis 7

Pindala S_2 on vahemikus [1; 2] joone $y = \frac{1}{x}$ alla jääv pindala:

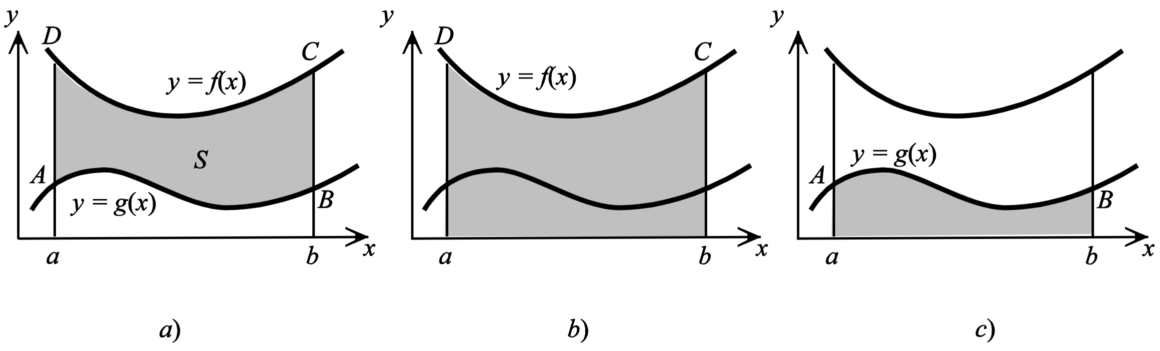
$$S_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln|x|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Kogupindala

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + \ln 2 \approx 1,19$$

Toodud näites jagati keerulisem piirkond kaheks lihtsamaks piirkonnaks. Seda meetodit kasutatakse ka siis, kui on vaja kahe kõvera vahelist pindala leida.
Jooniselt 8 on näha, et

$$S_{ABCD} = S_{abCD} - S_{abBA}$$



Joonis 8 Pindala *S* on kahe pindala vahe

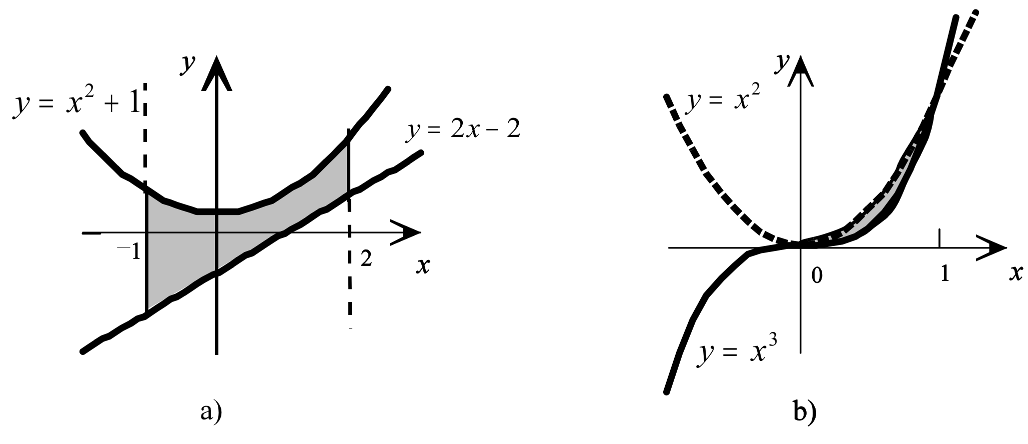
Arvestades, et $S_{abCD} = \int_a^b f(x)\,dx$ (joonis 8b) ja $S_{abCD} = \int_a^b g(x)\,dx$ (joonis 8c), saame

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

NÄIDE 3.25. Kõverate vahelise piirkonna pindala

Leida pindala, mis jääb kõverate $y = x^2 + 1$ ja $y = 2x - 2$ vahele vahemikus x = -1 ja x = 2 (joonis 9a):

$$S = \int_{-1}^{2} [(x^2+1) - (2x-2)]\,dx = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_{-1}^{2} = \frac{14}{3} - \left(-\frac{13}{3}\right) = 9$$



Joonis 9 Kõverate vahelise piirkonna pindala

NÄIDE 3.26. Kõverate vahelise piirkonna pindala

Leida pindala, mis jääb kõverate $y = x^3$ ja $y = x^2$ vahele (joonis 9b).

Et leida integreerimisradasid, tuleb leida punktid, kus kõverad lõikuvad. Selleks tuleb lahendada võrrand

$$x^3 = x^2$$
$$x^3 - x^2 = 0$$
$$x^2(x-1) = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ ja } x_2 = 1$$

Arvestame sellega, et vahemikus $0<x<1$ on $x^2>x^3$ ja järelikult selles vahemikus on joon $y=x^2$ ülevalpool joont $y=x^3$. Seega integraali all peab olema vahe x^2-x^3:

$$S=\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

ÜLESANDED

3.44 Leida piirkonna R pindala kui

a) R on nelinurk, mille tipud asuvad punktides (-4; 0), (2; 0), (-2; 5), (1; 5);

b) R on piiratud joonega $y=e^x$, joontega $x = 0$ ja $x=\ln\frac{1}{2}$ ning x-teljega.;

c) R on piiratud joonega $y=\frac{1}{x^2}$, joontega $y = x$ ja $y=\frac{x}{8}$.;

d) R on piiratud joontega $y_1=7-x$ ja $y_2=4x-x^2$ ning sirgetega $x = 1$ ning $x = 4$;

e) R on piiratud joontega $y_1=6-x$ ja $y_2=4$ ning sirgetega $x = 0$ ja $x = 5$;

f) R on piiratud joontega $y_1=x^2-4x+8$ ja $y_2=2x$ ning sirgetega $y = 0$ ja $x = 3$;

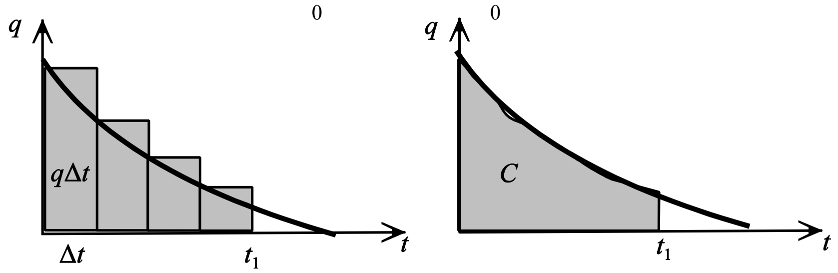
g) R on piiratud joontega $y_1=\frac{8}{x}$ ja $y_2=\sqrt{x}$ ning sirgetega $y = 0$ ja $x = 8$;

VASTUSED **3.44** a) 22,5; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{4}$, d) 4,5; e) 6,5; f) $\frac{25}{3}$; g) ca 10,88.

Määratud integraali rakendusi

Kirjeldagu kaubavarude muutumist funktsioon $q(t)$ ja olgu kaubaühiku säilituskulud ajaühiku jooksul c_s. Lühikese ajavahemiku Δt jooksul on **säilituskulud** $c_s\,q(t)\Delta t$, kus korrutis $q(t)\Delta t$ on joone $q(t)$ alla jääva ristküliku pindala. Summaarsed säilituskulud vahemikus $[0;t_1]$ on leitavad määratud integraali abil

$$C=\int_0^{t_1} c_s q(t)\,dt=c_s\int_0^{t_1} q(t)\,dt$$



Joonis 10 Säilituskulud

NÄIDE 3.27. Säilituskulud

Toidukaupade müügiga tegelev firma sai kätte tellitud koguse, 10 000 kilogrammi, riisi. Iga kuu müüakse riisi 2000 kg. Kui 1 kg riisi säilituskulu kuus on 1,2 krooni, kui suured on säilituskulud viie kuu peale?

Lahendus:

Riisi kogus t kuu pärast on

$$q(t)=10\,000-2000\,t$$

Kogukulu C viie kuu jooksul on määratud integraal radades 0-st 5-ni

$$C = \int_0^5 1{,}2\,q(t)\,dt = 1{,}2\int_0^5 (10\,000 - 2000\,t)\,dt =$$
$$= 1{,}2\left[10\,000\,t - 1000\,t^2\right]_0^5 = 30\,000$$

Vastus: Viie kuu jooksul kulub säilitamiseks 30 000 krooni.

Puhas ülekasum (*net excess profit*). Firma on investeerinud kahte projekti. Investeeringud toovad iga aasta kasumit vastavalt $P_1(t)$ ja $P_2(t)$ krooni aastas. Järgmise N aasta jooksul toob investeering 2 aastas rohkem sisse kui investeering 1: $P_2(t) > P_1(t);\quad t = 0,\ldots N.$

Vahe $P_2(t) - P_1(t)$ näitab, kui palju toob investeering 2 aastas rohkem kasumit kui investeering 1. Määratud integraal sellest radades t = 0 kuni t = N annab meile puhta ülekasumi P*, mille võrra N aasta jooksul investeeringu 2 poolt saadud kasum ületab investeeringu 1 poolt saadud kasumit:

$$P^* = \int_0^N (P_2(t) - P_1(t))\,dt$$

NÄIDE 3.28. Puhas ülekasum

Olgu meil kaks investeerimisplaani. Esimene annab aastas $P_1(t) = 50 + t^2$ tuhat krooni kasumit ja teine plaan toob kasumit $P_2(t) = 200 + 5t$ tuhat krooni aastas. Leida

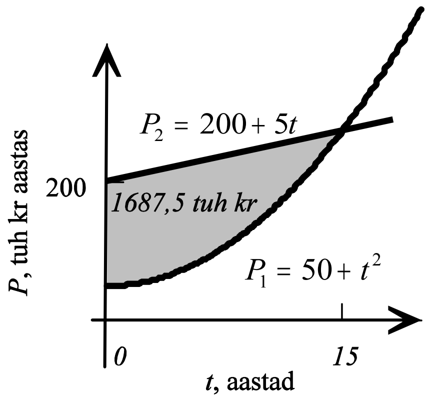
a) mitme aasta vältel on teine investeering kasulikum kui esimene;

b) kui palju annab teine inveteerimisplaan selle aja jooksul kasumit rohkem, võrreldes esimese investeeringuga.

Lahendus.

a) Selleks et leida, mitme aasta vältel on teine plaan kasulikum kui esimene, leiame ajahetke, millal kasumid saavad võrdseks (joonis 11).

$$P_1 = P_2$$
$$50 + t^2 = 200 + 5t$$
$$t^2 - 5t - 150 = 0$$
$$t = 15 \quad (t = -10 \text{ ei sobi})$$



Joonis 11

Vastus. Teine investeerimisplaan on esimesest kasulikum 15 aasta vältel.

b) Kui palju toob vahemikus [0; 15] teise plaani alusel tehtud investeering puhast ülekasumit, on leitav määratud integraali abil:

$$\int_0^{15} [P_2(t) - P_1(t)]\,dt = \int_0^{15} [(200 + 5t) - (50 + t^2)]\,dt =$$
$$= \int_0^{15} (150 + 5t - t^2)\,dt = \left[150t + \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^{15} = 1687{,}5$$

Vastus: Teise investeeringu poolt saadav puhas ülekasum on esimese 15 aasta jooksul 1687,5 tuh. kr.

Tööpingi kasutamisel saadav **puhastulu** (*net earning*) ajavahemiku Δt jooksul on selle aja jooksul seadme kasutamisel saadud tulu miinus tegevuskulud selle aja jooksul (töötasu, seadmete hooldus, energiakulu).

NÄIDE 3.29. Seadme kasutamisel saadud puhastulu

Tööpink, mida on kasutatud t aastat, annab aastas tulu $R(t) = 5000 - 20t^2$ krooni. Tegevuskulud on $C(t) = 2000 + 10t^2$ krooni aastas. Leida

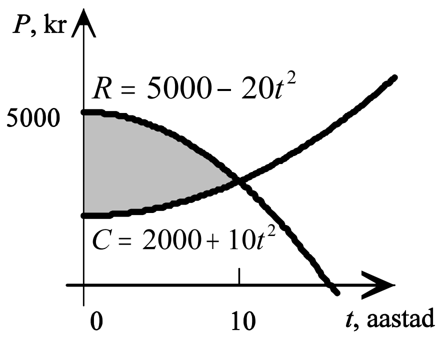
a) kui kaua toob seadme kasutamine kasumit;

b) kui suur on selle aja jooksul seadme poolt toodetud puhastulu?

Lahendus (vt joonis 12).

a) Selleks et leida, mitme aasta vältel on seadme kasutamisel saadud tulu suurem kui kulu, leiame ajahetke, millal tulu ja kulu saavad võrdseks:

$$5000 - 20t^2 = 2000 + 10t^2$$
$$30t^2 = 3000$$
$$t^2 = 100$$
$$t = 10$$



Joonis 12

Vastus: Tööpingi kasutamisel saadud tulu on kuludest suurem esimese 10 aasta vältel.

b) Tööpingi kasutamisel 10 aasta vältel saadud puhastulu on määratud integraal:

$$\int_0^{10} [R(t) - C(t)]\,dt = \int_0^{10} [(5000 - 20t^2) - (2000 + 10t^2)]\,dt =$$
$$= \int_0^{10} (3000 - 30t^2)\,dt = \Big[3000t - 10t^3\Big]_0^{10} = 20\,000$$

ÜLESANDED

3.45 Alates juulist vähenevad päikesekreemi varud eksponentsiaalselt, ühe nädalaga oli müüdud 15% esialgsetest varudest. Leida päikesekreemi säilituskulud juulist augustini (8 nädalat), kui 1 kreemikarbi säilituskulud on 15 senti nädalas ja juuli algul on laos 500 karpi päikesekreemi.

3.46 On teada, et investeerimisplaan A annab aastas kasumit $P_A = 100 + t^2$ tuhat krooni ja investeerimisplaan B toob kasumit $P_B = 220 + 2t$ tuhat krooni aastas, kus t on aeg aastates. Leida

a) mitme aasta vältel on plaan B kasulikum kui plaan A;

b) kui palju on plaani B korral selle aja jooksul saadud kasum suurem kui plaani A korral.

3.47 Tööpink, mida on kasutatud t aastat, annab aastas tulu $R(t) = 6025 - 10t^2$ krooni. Tegevuskulud on $C(t) = 4000 + 15t^2$ krooni aastas. Leida

a) kui kaua toob seadme kasutamine kasumit;

b) kui suur on selle aja jooksul seadme poolt toodetud kasum.

3.48 t tundi peale tööpäeva algust toodab esimene tööline $q_1(t) = 60 - 2(t-1)^2$ toodet tunnis ja teine tööline $q_2(t) = 50 - t$ ühikut tunnis. Kui mõlemad saabuvad tööle kell 8.00 ja lõuna on kell 12.00 , kui palju toodab esimene tööline enne lõunat teisest rohkem.

3.49 Laekumised heategevusfondi on $R(t) = 6537\,e^{-0{,}3t}$ krooni nädalas, kus t on nädalate arv alates praegusest. Väljamakseid prognoositakse konstantselt keskmiselt 593 krooni nädalas. Leida

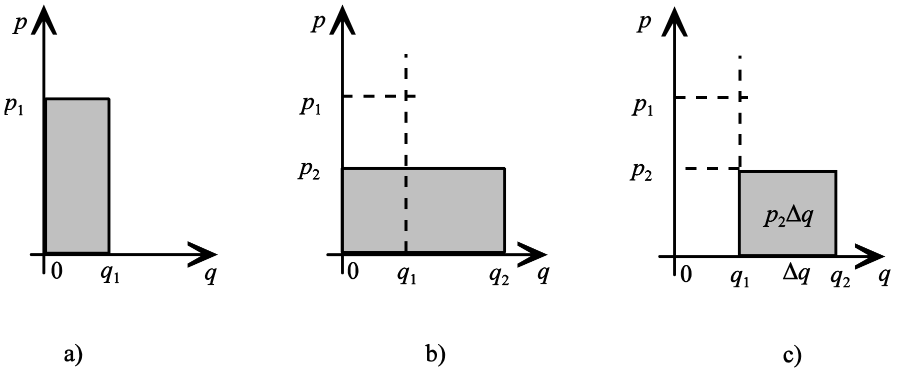
a) mitme nädala vältel ületavad laekumised väljamakseid;

b) Kui palju on selle ajaks fondi raha jäänud?

VASTUSED **3.45** 335 kr **3.46** a) 12 aastat, b) 1,008 milj kr. **3.47** a) 9 aastat; b) 12150 kr. **3.48** 29,3 ühikut. **3.49** a) 8 nädalat, b) 15069 kr.

Tarbija maksevalmidus ja hinnavaru

Olgu meil hüvise hind p_1 ja sellele vastav nõutav kogus q_1. Korrutis $p_1 q_1$ on siis rahasumma, mida kõik tarbijad kokku on nõus selle hüvise peale kulutama. Graafikul väljendab seda vastava ristküliku pindala (joonis 13a). Kui hinda langetada väärtuseni p_2, siis nõutav kogus suureneb väärtuseni q_2 (joonis 13b). Korrutis $p_2\,\Delta q$ on rahasumma, mida tarbija on nõus maksma täiendava koguse Δq eest (joonis 13c).

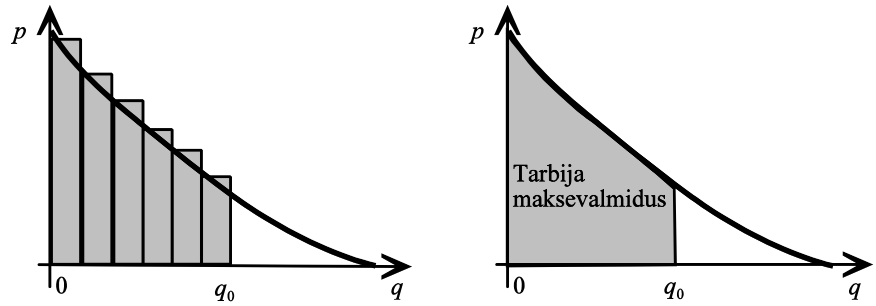


Joonis 13 Tarbija kulud

Kui me vaatleme hinda ja kogust kui pidevaid suurusi, siis nõudluskõvera $p = f(q)$ alla jääva piirkonna pindala on tõlgendatav kui rahana, mida tarbija on nõus maksma koguse q_0 tarbimise eest (joon. 14). Seda nimetatakse **tarbija maksevalmiduseks** (*willingness to pay*):

$$TMV = \int_0^{q_0} p(q)\,dq$$

Kui kasulikkust mõõta rahaühikutes, võib seda tõlgendada ka kui tarbija **kogukasulikkust** koguse q_0 tarbimisel.



Joonis 14 Tarbija maksevalmidus

NÄIDE 3.30. Tarbija maksevalmidus

Olgu hüvise nõudlusfunktsioon $p(q) = 4(25 - q^2)$, kus p on hind kroonides ja q nõutav kogus. Leida, kui palju on tarbija valmis maksma 3 ühiku tarbimise eest.

Lahendus.

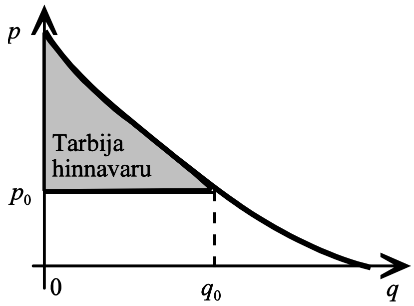
Tuleb leida nõudluskõvera alla jääva piirkonna pindala vahemikus [0; 3]. Selle leidmiseks kasutame määratud integraali:

$$TMV = \int_0^3 p(q)\,dq = \int_0^3 4(25 - q^2)\,dq = 4\left[25q - \frac{1}{3}q^3\right]_0^3 = 264$$

Vastus: Toodud nõudlusfunktsiooni korral on tarbija maksevalmidus 3 ühiku tarbimiseks 264 krooni.

Turukonkurentsi korral on tarbijate poolt tehatavad tegelikud kulutused enemasti väiksemad kui nende maksevalmidus. Erinevust maksevalmiduse ja tegelike tarbimiskulude vahel näitab **tarbija hinnavaru** (*consumer surplus*). See kujutab endast kasulikkust, mida nad said lisaks sellele, mille eest nad maksid.

$$\begin{pmatrix}\text{tarbija}\\ \text{hinnavaru}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{tarbija}\\ \text{maksevalmidus}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tarbija}\\ \text{tegelikud kulutused}\end{pmatrix}$$



Joonis 15 Tarbija hinnavaru

Kui hüvise tegelik hind on p_0, siis tarbija hinnavaru on sellise piirkonna pindala, mis jääb nõudluskõvera $p(q)$ alla ja ulatub kuni jooneni $p = p_0$.

Selle pindala leidmiseks kasutame määratud integraali

$$\int_0^{q_0} [p(q) - p_0]\, dq = \int_0^{q_0} p(q)\, dq - p_0 q \Big|_0^{q_0} = \int_0^{q_0} p(q)\, dq - p_0 q_0$$

> Kui hüvise hind on p_0 ja nõudlusfunktsioon on $p(q)$, siis **tarbija hinnavaru**
>
> $$\text{THV} = \int_0^{q_0} p(q)\, dq - p_0 q_0$$

NÄIDE 3.31. Tarbija hinnavaru

Olgu hüvise nõudlusfunktsioon $p(q) = 100 - 0{,}5q^2$, kus p on hind kroonides ja q nõutav kogus. Leida, kui suur on tarbija hinnavaru, kui praegu on hüvise hind 50 kr.

Lahendus: Kui hind on $p_0 = 50$, siis sellele vastava nõutava koguse leiame võrrandist

$$50 = 100 - 0{,}5q_0^2$$
$$0{,}5q_0^2 = 50$$
$$q_0^2 = 100$$
$$q_0 = 10$$

Tarbija hinnavaru leidmiseks kasutame määratud integraali:

$$THV = \int_0^{q_0} p(q)\, dq - p_0 q_0 = = \int_0^{10} (100 - 0{,}5q^2)\, dq - 50 \cdot 10 = \left[100q - \frac{0{,}5}{2}q^3\right]_0^{10} - 100 = 650$$

Vastus: Tarbija hinnavaru hinna 50 kr korral on 650 krooni.

ÜLESANDED

3.50 Leida tarbija maksevalmidus koguse q_0 tarbimisel, kui

a) nõudlusfunktsioon on $p(q) = \dfrac{300}{(0{,}1q + 1)^2}$ ja $q_0 = 5$ ühikut;

b) nõudlusfunktsioon on $p(q) = \dfrac{300}{4q + 3}$ ja $q_0 = 10$ ühikut;

c) nõudlusfunktsioon on $p(q) = 50e^{-0{,}04q}$ ja $q_0 = 15$ ühikut.

3.51 Leida tarbija hinnavaru hinna p_0 korral, kui

a) nõudlusfunktsioon on $p(q) = 150 - 2q - 3q^2$ ja $p_0 = 117$ krooni;

b) nõudlusfunktsioon on $p(q) = \dfrac{400}{0{,}5q + 2}$ ja $p_0 = 20$ krooni;

c) nõudlusfunktsioon on $p(q) = 30e^{-0{,}04q}$ ja $p_0 = 10$ krooni;

3.52 Kauba nõudlusfunktsiooniks on $p(q) = 124 - 2q$ ja kulud q ühiku tootmisel $C(q) = 2q^3 - 59q^2 + 4q + 7600$. Leida

a) millise koguse juures on tootja kasum maksimaalne;

b) tarbija hinnavaru hinna korral, mis vastab maksimaalsele kasumile.

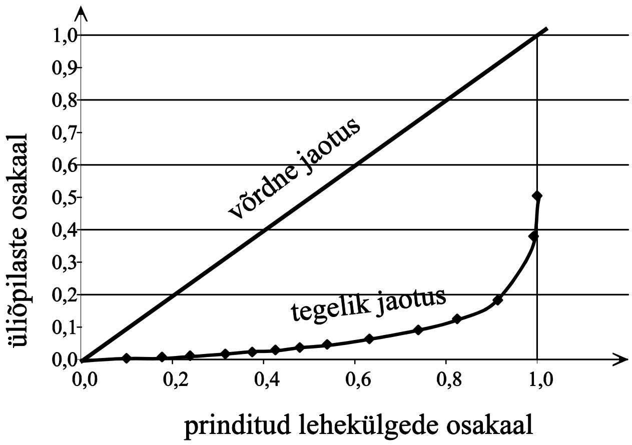
3.53 Olgu nõudlusfunktsioon $D(q) = \frac{16}{q+2} - 3$ ja pakkumisfunktsioon $S(q) = \frac{1}{3}(q+1)$. Leida tarbija hinnavaru turutasakaalu korral.

VASTUSED
3.50 a) 1000 kr; b) 199,69 kr; c) 563,99 kr. **3.51** a) 63 kr; b) 1122,07 kr; c) 225 kr. **3.52** a) 20; b) 400 kr. **3.53** 3,09 kr

Lorenzi kõver

NÄIDE 3.32. Lorenzi funktsioon
98/99 õ.-a- kevadesmestril polnud ülõpilastele printimise limiite keshtestatud. Kokku prinditi sellel semestril 519 üliõpilase poolt 17517 lehekülge. Tabelis on toodud prinditud lehekülgede jaotus üliõpilaste vahel. On näha, et 9,90% printitud lehekülgede arvust langes 0,39% üliõpilaste arvele ja 99,23% printimise mahust 37,96% -le ülõpilastest. Kui kõik õliõpilased oleksid printinud võrdselt, vastaks üliõpilaste osakaal prinditud lehekülgede osakaalule (tabeli viimane veerg)

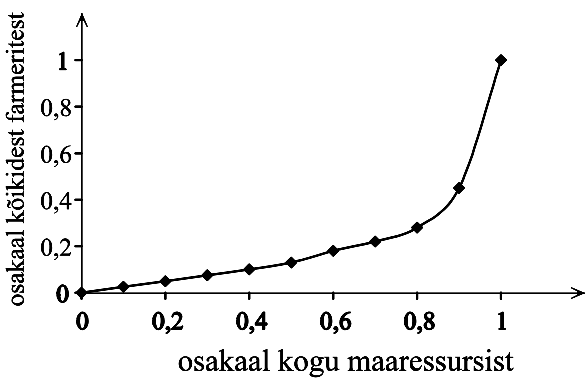
Prinditud lehekülgede osakaal	Üliõpilaste osakaal	Üliõpilaste osakaal võrdse jaotuse korral
9,90%	0,39%	9,90%
17,69%	0,77%	17,69%
23,85%	1,16%	23,85%
31,58%	1,73%	31,58%
37,49%	2,31%	37,49%
42,58%	2,89%	42,58%
47,94%	3,66%	47,94%
53,94%	4,62%	53,94%
63,20%	6,36%	63,20%
73,95%	9,06%	73,95%
82,47%	12,52%	82,47%
91,36%	18,30%	91,36%
99,23%	37,96%	99,23%
100,00%	50,48%	100,00%



Joonis 16 Printimine 98/99 õ-a kevadsemestril

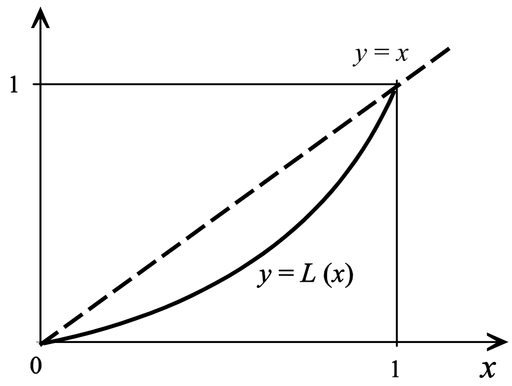
NÄIDE 3.33. Lorenzi funktsioon
Tabelis toodud andmed näitavad, kuidas USA-s 1964 aastal jagunes farmerite käes olev maa farmerite vahel. (Algallikas: Harry M. Sheley, "The distribution or Recources" UMAP Modules 1977: Tools for Teaching, Consortium for Mathematics and Applications, Inc., Lexington, MA, 1978, pages 1-28.)

Osakaal kogu maaressursist	Osakaal kõikidest omanikest
0	0
0,1	0,025
0,2	0,050
0,3	0,075
0,4	0,10
0,5	0,13
0,6	0,18
0,7	0,22
0,8	0,28
0,9	0,45
1	1

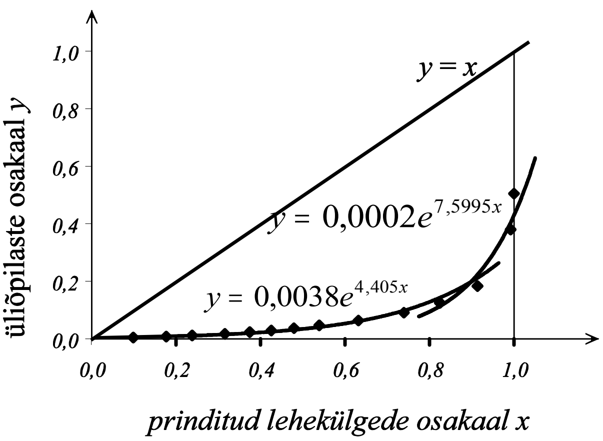


Joonis 17 Maa jaotus farmerite vahel USA-s 1964.a

Majandust ja ühiskonna arengut käsitlevate probleemide korral on tihti vaja uurida mingi ressursi jaotust vaadeldavas kogumis. Näiteks kui suur osa toodangust toodetakse 25%, 50%, 75% töötajate poolt, kuidas on antud tegevusala ettevõtete summaarne käive jagunenud ettevõtete vahel, kuidas



Joonis 18 Tüüpiline Lorenzi kõver



Joonis 19 Printimise lähendamine eksponentsiaalsete mudelitega

jagunevad elanikkonna sissetulekud.

Lorenzi funktsioon $L(x)$ on kasvav funktsioon vahemikus [0; 1], mis kirjeldab mingi suuruse või ressursi jaotust kogumis.

Lorenzi funktsiooni argumendiks x on vastava ressursi osakaal kogu jaotunud ressursist ja funktsiooni väärtuseks $L(x)$ seda osa omajate osakaal kogumist. **Lorenzi kõver** on Lorenzi funktsiooni graafik (joonis 18).

Gini indeks ehk ebavõrdsuse indeks on võrdset jaotust kirjeldava sirge $y = x$ ja Lorenzi kõvera vahelise pindala kahekordne väärtus.

$$G = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

Gini indeks on 0 maksimaalse võrduse korral ja 1 maksimaalse ebavõrdsuse korral. Näiteks kui mingi riigi elanikkonna kogu sissetulek läheb ühele inimesele, on tegemist maksimaalse ebavõrdsusega. Kui aga kõik saavad täpselt ühepalju, on tegemist maksimaalse võrdsusega ja Gini indeks on 0.

Märkus:
1998. a. majandusalase Nobeli preemia sai professor Amartya Sen (Cambridge) uuringute eest sotsiaalse valiku, heaolu ja vaesuse teemal. Oma teadustöödes tõi ta välja inimarengu kontseptuaalse raamistiku ning metoodika inimarengu mõõtmiseks, kasutades selleks Lorenzi kõverat ja Gini koefitsienti.

ÜLESANDED

3.54 Leia Gini koefitsient järgmiste Lorenzi kõverate korral

a) $L(x) = x^2$;

b) $L(x) = x^3$;

c) $L(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$;

d) $L(x) = 2^x - 1$

3.55 Näites 3.32 toodud prinditud lehekülgede arvu jaotust võib modelleerida kahes osas, joontega $y = 0{,}0038e^{4{,}405x}$ ja $y = 0{,}0002e^{7{,}5995x}$ (joonis 19). Leida vastav Gini koefitsient.

3.56 Näidata, et suvalise Lorenzi funktsiooni Gini indeksi väärtus jääb 0 ja 1 vahele.

VASTUSED

3.54 a) $G = \dfrac{1}{3}$; b) $G = \dfrac{1}{2}$ c) $G = 1 - \dfrac{2(e-2)}{e-1} \approx 0{,}164$; d) $G = 3 - \dfrac{2}{\ln 2} \approx 0{,}115$. **3.55** $G = 0{,}854$

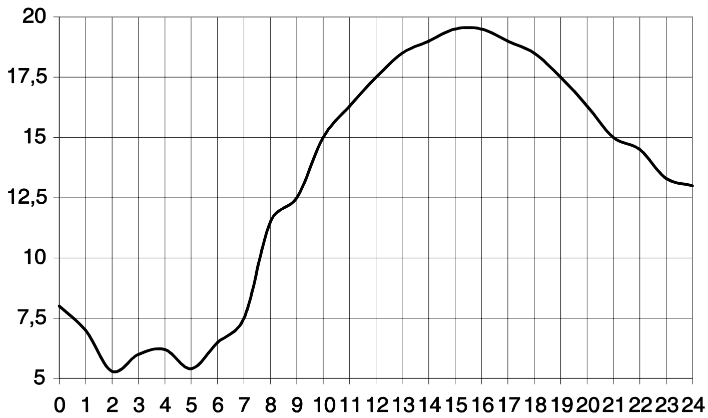
Funktsiooni keskväärtus

NÄIDE 3.34. Keskmine õhutemperatuur

Et leida päeva keskmist õhutemperatuuri, oleks meil vaja temperatuuri väärtusi erinevatel ajamomentidel. Kui öösel kell 0:00 oli õhutemperatuur 8 °C ja päeval kell 12.00 17,5 °C, siis nende andmete järgi tuleb keskmiseks temperatuuriks $\frac{8+17,5}{2}=12,75\,°C$. Kahe väärtuse põhjal ei pruugi aga see tulemus kuigi õige olla, kuna me ei tea, milline oli temperatuur teistel kellaaegadel. Et saada täpsemat väärtust, tuleks keskmise õhutemperatuuri leidmiseks määrata temeperatuuri tihedamini, väiksemate intervallide tagant

Õhutemperatuur Tartus 18.apr. 2000.a. Saadaval http://meteo.physic.ut.ee/

Kellaaeg t	Temperatuur T	Kellaaeg t	Temperatuur T
0	8,0	12	17,5
1	7,0	13	18,5
2	5,3	14	19,0
3	6,0	15	19,5
4	6,2	16	19,5
5	5,4	17	19,0
6	6,5	18	18,5
7	7,5	19	17,5
8	11,5	20	16,3
9	12,5	21	15,0
10	15,0	22	14,5
11	16,3	23	13,3



Joonis 20 Õhutemperatuur Tartus 18. apr. 2000

Tabelis toodud andmete põhjal keskmine temperatuur

$$\bar{T}=\frac{T(0)+T(1)+....+T(23)}{24}=\frac{1}{24}\sum_{i=0}^{23}T(t_i)\approx 13,1\,°C$$

Et saadud vastus oleks veel täpsem, tuleks temperatuuri registreerida veel sagedamini.

Funktsiooni keskmise väätuse leidmiseks mingis vahemikus [a; b], tuleb see vahemik jagada n võrdseks osaks laiusega Δx. Tähistades i-nda lõigu otspunkti x_i ja sellele vastavat funktsiooni väärtust $f(x_i)$, saame leida nende n väärtuse aritmeetilise keskmise

$$\bar{f}=\frac{f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_n)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

Vähendame lõikude laiust, minnes üle piirile $\Delta x\to 0$. Siis

$$\bar{f}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

Et kasutada selle summa leidmiseks määratud integraali, tuleb meil avaldisse tuua vahemiku laius Δx (vt valem lk 17). Kuna $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, siis $\frac{1}{n}=\frac{\Delta x}{b-a}$ ja

$$\bar{f}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{1}{b-a}\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

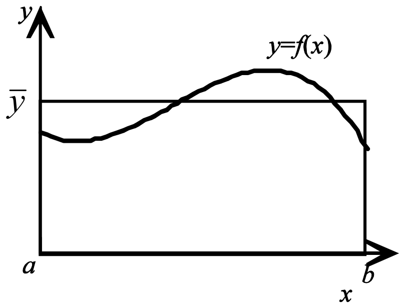
Funktsiooni $f(x)$ **keskmise väärtuse** leidmiseks vahemikus [a; b] kasutatakse määratud integraali

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Funktsiooni keskmise väärtuse **geomeetriline tõlgendus .**
Vaatame veel valemit funktsiooni keskmise väärtuse arvutamiseks

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\bar{f}(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Vasakul pool on korrutis, mida võib tõlgendada kui kõrgusega $\bar{f}$ ja alusega $b-a$ ristküliku pindala. Funktsiooni keskmine väärtus mingil lõigul on võrdne sellise ristküliku kõrgusega, mille pindala võrdub funktsiooni graafiku alla jääva pindalaga.

ÜLESANDED
3.57 Leia funktsiooni keskmine väärtus etteantud intervallil
a) $f(x) = x;\quad 0 \le x \le 4;$
b) $f(x) = 2x - x^2;\quad 0 \le x \le 2;$
c) $f(x) = (x+2)^2;\quad -4 \le x \le 0;$
d) $f(x) = \frac{1}{x};\quad 1 \le x \le 2$

3.58 Näites 3.18 toodud temperatuuri muutumist võib ajavahemikus 9.00 kuni 24.00 küllaltki täpselt modelleerida kolmanda astme polünoomiga $T = 0{,}0075t^3 - 0{,}4868t^2 + 9{,}5302t - 39{,}399$, kus t on aeg tundides alates kesköõst. Leida
a) keskmine õhutemperatuur kella 9.00 ja 13.00 vahel
b) keskmine õhutemperatuur kella 20.00 ja 24.00 vahel

3.59 Lennujaama ilmavaatlusandmetel võib õhutemperatuuri muutumist ööpäeva jooksul kirjeldada mudeliga $T(t) = -0{,}3t^2 + 4t + 10$, kus t on aeg tundides alates keskööst. Milline on keskmine õhutemperatuur vahemikus 9.00 kuni 12.00?

3.60 Postitöötaja, kes on töötanud t kuud, sorteerib posti kiirusega $Q(t) = 700 - 400e^{-0{,}5t}$ kirja tunnis. Milline on töötaja keskmine postisorteerimise kiirus esimese kolme töökuu jooksul?

3.61 USA Rahvastikubüroo analüüs näitas, et ajavahemikul 1790.a. kuni 1960. a. on USA rahvaarvu võimalik modelleerida logistilise mudeliga $N(t) = \frac{202{,}31}{1 + e^{3{,}938 - 0{,}314t}}$, kus N on rahvaarv miljonites ja t aastakümned alates aastast 1790 (aastatel 1790 kuni 1799 on $t = 0$, aastatel 1900 kuni 1909 on $t = 11$). Leida USA keskmine rahvaarv antud perioodil $0 \le t \le 17$.

3.62 Kiirtee operaatorfirma vaatlusandmetel võib liikumiskiiruse kiirteel tavalisel tööpäeval vahemikus 13.00 kuni 18.00 arvutada valemist $1{,}6t^3 - 17t^2 + 48t + 32$ (km/h), kus t on aeg tundides alates kella 13.00-st. Leida liiklusvoo keskmine kiirus selle ajavahemiku jooksul.

3.63 Analüüs näitab, et alates aasta algusest muutub loomaliha hind turul järgmise mudeli järgi: $p(t) = 2{,}58t^2 - 5{,}72t + 54{,}81$ kr, kus t on aeg kuudes alates aasta algusest. Milline on loomaliha keskmine hind 1. kvartalis?

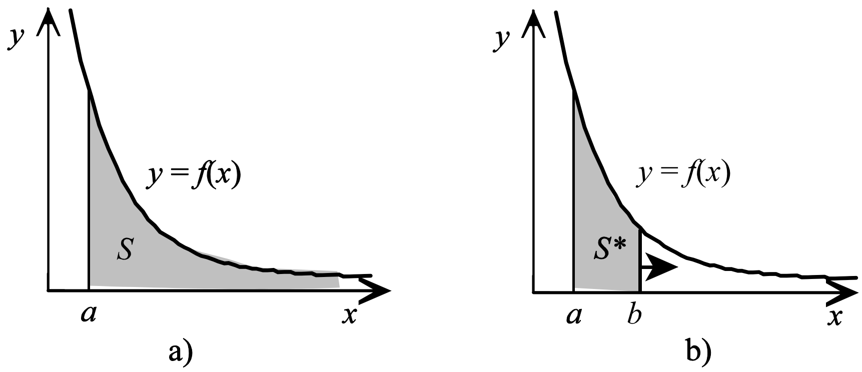
3.64 Kasutades ülesandes 3.18 leitud mudelit osooni konsentratsiooni muutumise kohta Los Angeleses $L(t) = 0{,}03\sqrt{-t^2 + 16t + 36} + 0{,}07$ (osakest miljoni kohta), kus t oli aeg tundides alates kella 7.00-st, leida keskmine osooni kontsentratsioon
a) vahemikus 7.00 kuni 12.00;
b) vahemikus 12.00 kuni 19.00.

VASTUSED
3.57 a) 2; b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$; d) $\ln 2$ 3.58 a) 16,2°C; b) 14,5°C **3.59** 18,7°C **3.60** ca 493 kirja tunnis **3.61** 60,68 miljonit
3.62 60,3 km/h **3.63** 53,97 kr. **3.64** a) 0,32; b) 0,37

Päratud integraalid

Integraali, mille üks või mõlemad rajad on lõpmatud, nimetatakse **päratuks integraaliks**. Näiteks integraalid $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Kui $f > 0$, võib integraali $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ geomeetriliselt tõlgendada kui sellise piirkonna pindala, mis on kõvera $f(x)$ all ja jääb sirgest $x = a$ paremale (joonis 22a) . Sellise tõkestamata piirkonna pindala võib olla kas lõplik või lõpmatu, sõltuvalt sellest, kui kiiresti $f(x)$ läheneb nullile, kui x läheneb lõpmatusele.



Joonis 22 Päratu integraal kui pindala

Vastava piirkonna pindala S leidmiseks võib kasutada järgmist võtet. Algul leitakse pindala S* kuni arvuni b ja siis lastakse väärtusel b läheneda lõpmatusele (joonis 22b):

$$S = \lim_{b\to\infty} S^* = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Funktsiooni $f(x)$ **päratuks integraaliks** poolvahemikus $[a; \infty)$ nimetatakse piirväärtust

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Kui selline piirväärtus on olemas, siis öeldakse, et päratu integraal **koondub**, vastasel juhul aga päratu integraal **hajub**.

NÄIDE 3.35. Päratu integraali leidmine. Leida integraal $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Algul leiame määratud integraali radades 1-st b-ni ja siis vastava piirväärtuse:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$$

NÄIDE 3.36. Päratu integraali leidmine. Leida integraal $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

Algul leiame määratud integraali radades 1-st b-ni ja siis vastava piirväärtuse:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\Big[\ln|x|\Big]_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty$$

Seega integraal $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ hajub.

Selgitame, milliste α väärtuste korral $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ koondub ja milliste korral hajub.

Kui $\alpha\neq 1$, siis määratud integraal

$$\int_1^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b=\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}$$

ning vastav päratu integraal

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}b^{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}$$

Kui $\alpha=1$, siis määratud integraal

$$\int_1^{b}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^b=\ln b$$

Kui $\alpha>1$, siis $\lim_{b\to\infty}b^{1-\alpha}=0$ ning $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\frac{1}{\alpha-1}$,

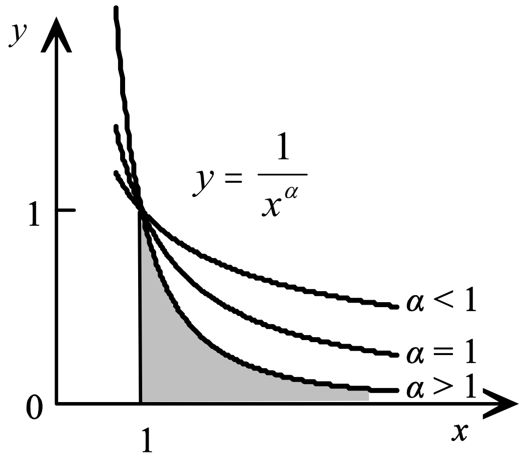
s.t. integraal koondub.

Kui $\alpha<1$, siis $\lim_{b\to\infty}b^{1-\alpha}=\infty$ ning $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\infty$,

s.t. integraal hajub.

Kui $\alpha=1$, siis $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty$,

s.t. integraal hajub.



Joonis 23

NÄIDE 3.37. Päratu integraali leidmine. Leida integraal $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

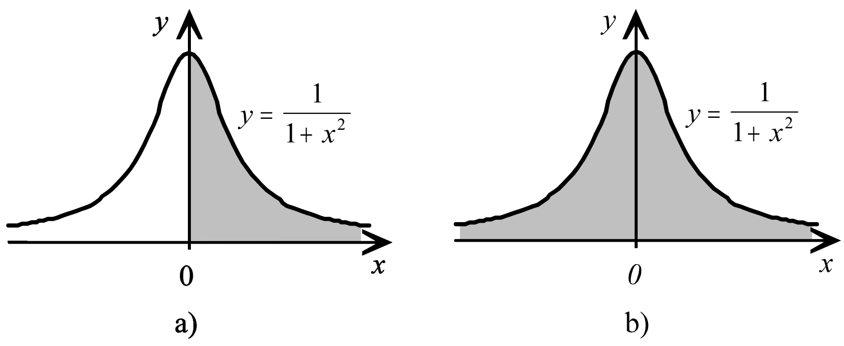
Lahendus. Päratu integraali definitsiooni kohaselt

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}\arctan b=\frac{\pi}{2}$$

Leitud integraal annab meile joonisel 24a) varjutatud piirkonna pindala.

Poolvahemikus (- ∞, *b*] defineeritakse päratu integraal analoogselt piirväärtuse kaudu:

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{b}f(x)\,dx$$



Joonis 24

Vahemikus (-∞, ∞) defineeritakse päratu integraal eelnevate kaudu järgmiselt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

NÄIDE 3.38. Päratu integraali leidmine. Leida integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Lahendus. Jaotame integraali kaheks, kus esimene on päratu integraal üle poolvahemiku (- ∞, 0] ja teine üle poolvahemiku [0; ∞):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Teine integraal on $\frac{\pi}{2}$ (vt. näide 3.37). Leiame esimese integraali:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \arctan x \Big|_{a}^{0} = \arctan 0 - \lim_{a\to-\infty} \arctan a = 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

Järelikult

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Leitud integraal annab meile joonisel 24b) varjutatud piirkonna pindala.

Päratute integraalide leidmisel tuleb vahetevahel leida piirväärtusi, mille korral on tegemist määramatustega tüüpi $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$. Näiteks piirväärtused $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(1+x)^2}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$. Selliste piirväärtuste leidmisel kasutatakse L'Hospitali reeglit.

Kui nii murru lugeja kui ka nimetaja piirväärtus on null (määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$), siis L'Hospitali reegli kohaselt tuleb mõlemast leida tuletis ja seejärel leida piirväärtus vastavate tuletiste jagatisest. Samamoodi tehakse siis, kui nii lugeja kui ka nimetaja piirväärtus on ∞ (määramatus tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$). Sisuliselt võrreldakse lugeja ja nimetaja muutumise kiirusi.

L'Hospitali reegel.
Kui nii $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ kui ka $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, siis kehtib võrdus:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Kui nii $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ kui ka $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$, siis kehtib võrdus

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

NÄIDE 3.39. L'Hospitali reegli kasutamine. Leida piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{(1+x)^2}$.

Kuna nii lugeja kui ka nimetaja piirväärtus on lõpmatus, on tegemist määramatusega tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$ ja kasutame L'Hospitali reeglit

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1+x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{((1+x)^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+2x}=0$$

NÄIDE 3.40. L'Hospitali reegli kasutamine. Leida piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$.

Tegemist määramatusega tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$ ja kasutame L'Hospitali reeglit

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

Kui L'Hospitali reegli kasutamisel saadakse jälle määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$, rakendatakse reeglit korduvalt.

Rahanduses tähistab termin **annuiteet** ühesuurusi rahalisi makseid, mida tehakse mitmel järjestikusel perioodil. **Perpetuiteet** on igavesti kestev annuiteet.

Vaatleme perpetuiteeti intresside pideva juurdearvestuse korral. Intresside pideva juurdearvestuse meetodi korral on investeeringu tulevikuväärtus (lõppkapital) t aasta pärast

$$K=ke^{rt} ,$$

kus r intressimäär aastas ja k olevikuväärtus (algkapital). Olevikuväärtuse leidmiseks kasutame siis valemit

$$k=Ke^{-rt} .$$

Leiame algul sellise investeeringu olevikuväärtuse, mis võimaldaks N aasta jooksul igal aastal välja võtta summa S. Jagame N aasta pikkuse ajavahemiku alamlõikudeks pikkusega Δt ja t_i tähistagu i-nda lõigu algust. Kui me aastas tahame saada S krooni, siis i-nda ajavahemiku Δt jooksul peaks see summa olema

$$K_i=S\Delta t_i .$$

Selleks tuleks aga iga i-nda ajavahemiku jaoks investeerida

$$k_i = K_i e^{-rt_i} = S\,\Delta t_i\, e^{-rt_i} \quad \text{krooni.}$$

Summaarne investeering, mis võimaldaks kõikide ajavahemike jooksul välja võtta summa K_i, on siis

$$k = \sum_{i=1}^{N} k_i = S\sum_{i=1}^{N} e^{-rt_i}\Delta t_i \ .$$

Kui ajavahemiku Δt_i pikkust vähendada, siis

$$k = S \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} e^{-rt_i}\Delta t_i = S\int_0^N e^{-rt}dt \ .$$

Kui soovime, et sellest investeeringust piisaks piiramatuks ajaks ($N\to\infty$), siis on tegemist päratu integraaliga:

$$k = S\int_0^\infty e^{-rt}dt = S\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-rt}dt = = S\lim_{N\to\infty}\left[\frac{e^{-rt}}{-r}\right]_0^N =$$

$$= -\frac{S}{r}\lim_{N\to\infty}(e^{-0,1N}-1) = -\frac{S}{r}(0-1) = \frac{S}{r} \ .$$

Perpetuiteedi olevikuväärtus intresside pideva juurdearvestuse korral leitakse valemist

$$k = \frac{S}{r}$$

kus S on iga-aastase makse suurus ja r aastane intressimäär.

NÄIDE 3.41. Perpetuiteedi olevikuväärtus.
Rikas sponsor soovib toetada erakooli summaga, mis võimaldaks iga aasta teenida intresside pealt 80 tuhat krooni ja mis läheks kooli arvutiklasside hooldamiseks. Eeldades, et intresside arvutamisel kasutatakse pideva juurdearvestuse meetodit ning intressimäär aastas on konstantselt 10%, kui suure summa peaks sponsor koolile eraldama.
Lahendus. Kasutades perpetuiteedi olevikuväärtuse arvutamise valemit, kus iga aastane makse $S = 80\,000$ krooni ja aastane intreesimäär $r = 0,1$ saame

$$k = \frac{80\,000}{0,1} = 800\,000$$

Vastus: Toetuse suuruseks peaks olema 800 tuhat krooni.

ÜLESANDED
3.65 Leida järgmised päratud integraalid

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int_3^\infty \frac{1}{2x-1}dx$

d) $\int_3^\infty \frac{1}{(2x-1)^2}dx$ e) $\int_0^\infty 5e^{-2x}dx$ f) $\int_1^\infty \frac{x^2}{(x^3+2)^2}dx$

g) $\int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$ h) $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ i) $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$

3.66 Leida järgmised päratud integraalid

a) $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}dx$ b) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(5-x)^2}$ c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(9+x^2)}$

3.67 Leida järgmised päratud integraalid. Kasuta L'Hospitali reeglit.

a) $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}dx$ b) $\int_{-\infty}^{0} 2xe^{x}dx$ c) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+3x}}$

3.68 Iga aastane perpetuiteedisumma on 24 tuh krooni. Kui intresside juurdearvestus on pidev konstantse aastase intressimääraga 12%, milline on perpetuiteedi olevikuväärtus?

3.69 Praegu annab kinnisvara kasumit 100 tuh kr aastas ja iga aasta suureneb kasum 5 tuhande krooni võrra. Kui kasutada kasumi leidmiseks perpetuiteeti ning intresside juurdearvestuse meetodiks on pidev juurdearvestus intressimääraga 10% aastas, milline on kinnisvara praegune väärtus?

3.70 Näidata, et kui perpetuideedimakse on $A+Bt$, kus A ja B on konstandid ning t aeg aastates, siis intresside pideva juurdearvestuse korral on perpetuiteedi olevikuväärtus $\frac{A}{r}+\frac{B}{r^2}$.

3.71 See osa kõikidest patsientidest, kes jätkavad t kuud peale oma esimest visiiti ravi saamist, on $e^{-\frac{t}{20}}$. Kui keskmiselt lisandub kliinikule iga kuu 10 patsienti, kui palju on neid, kes on jäänud pikaajalisele ravile?

3.72 Haiglas viibiv patsient saab iga tund 5 ühikut ravimit. t tundi peale doosi saamist on patsiendi veres alles $f(t)=e^{-\frac{t}{10}}$ osa doosist. Kui ravimi manustamine on pikaajaline, kui mitu ühikut ravimit on patsiendi veres?

3.73 Ülesandes 3.61 kasutati USA rahvaarvu modelleerimiseks logistilist mudelit $N(t)=\frac{202{,}31}{1+e^{3{,}938-0{,}314t}}$, kus N on rahvaarv miljonites ja t aastakümned alates aastast 1790 (aastatel 1790 kuni 1799 on $t = 0$, aastatel 1900 kuni 1909 on $t = 11$). Leida USA keskmine rahvaarv, kui see mudel kehtiks piiramatu aja jooksul alates aastast 1799.

VASTUSED

3.65 a) $\frac{1}{2}$; b) ∞, integraal hajub; c) ∞, integraal hajub; d) $\frac{1}{10}$; e) $\frac{5}{2}$; f) $\frac{1}{9}$; g) ∞, integraal hajub; h) $\frac{2}{e}$; i) ∞, integraal hajub.

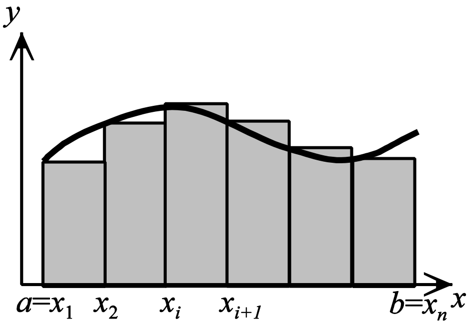
3.66 a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{\pi}{3}$ **3.67** a) 2 ; b) -2; c) $\ln\frac{1}{3}$ **3.68** 200 tuh. kr. **3.69** 1,5 milj. kr. **3.71** 200 **3.72** 50 ühikut. **3.73** 202,31 milj

Määratud integraali numbriline arvutamine

Integraali numbrilist arvutamist kasutatakse mitteelementaarsete integraalide korral, samuti ka elementaarfunktsioonides väljenduvate integraalide ligikaudsel leidmisel.

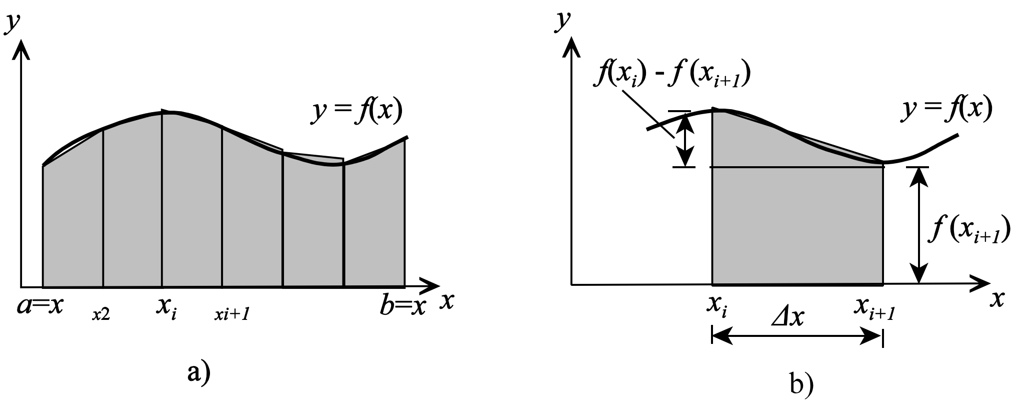
Nagu eespool näidatud, on määratud integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ võrdne funktsiooni $f(x)$ graafiku alla jääva pindalaga vahemiku a-st b-ni. Selle pindala ligikaudseks arvutamiseks võib vahemiku [a, b] jagada n lõiguks laiusega $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ ning integraali väärtus on ligikaudu võrdne vastavate ristkülikute pindalade summaga

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1)\,\Delta x + \ldots f(x_n)\,\Delta x$$



Joonis 25 Kõvera alla jääva pindala lähendamine ristkülikutega

Ristkülikute kasutamine võimaldab saada head tulemust vaid küllaltki suure arvu ristkülikute korral. Seepärast kasutatakse praktikas teisi lähendusmeetodeid. Alljärgnevalt vaadeldakse neist ühte.



Joonis 26 a) Kõvera alla jääva pindala lähendamine trapetsitega. b) *i*-s trapets

Arvutuse täpsus suureneb oluliselt, kui kasutada ristkülikute asemel trapetseid (joon. 26a). Detailselt on *i*-s trapets kujutatud joonisel 26b.Trapetsi võib jagada ristkülikuks pindalaga

$$S_{\square} = f(x_{i+1})\,\Delta x$$

ja kolmnurgaks pindalaga

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}[f(x_i) - f(x_{i+1})]\,\Delta x$$

i-nda trapetsi pindala on nende kahe pindala summa

$$S_i = S_{\square} + S_{\triangle} = f(x_{i+1})\,\Delta x + \frac{1}{2}[f(x_i) - f(x_{i+1})]\,\Delta x = \frac{1}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]\,\Delta x$$

Kõvera alla jäävate trapetsite kogupindala on ligikaudu kõvera $y = f(x)$ alla jääva piirkonna pindala ja seega vastava määratud integraali ligikaudne väärtus:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]\,\Delta x + \frac{1}{2}[f(x_2) + f(x_3)]\,\Delta x + \ldots + \frac{1}{2}[f(x_n) + f(x_{n+1})]\,\Delta x =$$

$$= \Delta x\left[\frac{1}{2}f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + \frac{1}{2}f(x_{n+1})\right]$$

Arvestades, et $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, saame valemi määratud integraali ligikaudseks leidmiseks.

Trapetsvalem määratud integraali ligikaudseks arvutamiseks

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + \frac{1}{2}f(x_{n+1})\right]$$

Mida suurem on *n*, seda väiksem on samm $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ja seda suurema täpsusega määrab paremal pool olev summa antud integraali väärtuse.

NÄIDE 3.42. Trapetsvalemi kasutamine Leida integraal $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

Jagame lõigu [1; 2] 10-ks osalõiguks. Siis $\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$ ning lõikude otspunktid

$$x_1 = 1;\ x_2 = 1{,}1;\ x_3 = 1{,}3;\ldots;x_{10} = 1{,}9;\ x_{11} = 2$$

Trapetsvalemi põhjal

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx 0{,}1\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{1{,}1}+\frac{1}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}3}+\frac{1}{1{,}4}+\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{1{,}6}+\frac{1}{1{,}7}+\frac{1}{1{,}8}+\frac{1}{1{,}9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}693771$$

Kui arvutada vastav määratud integraal, kasutades integreerimist, saame

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0{,}693147$$

Trapetsvalemi kasutamine antud integraali leidmisel annab $n = 10$ korral õige vastuse kahe tüvenumbri täpsusega.

Vahe määratud integraali ja trapetsvalemi abil leitud summa vahel on trapetsvalemi **jääkliige**

$$R_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}[f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

R_n on viga, mille lisamisel trapetsvalemist arvutatud ligikaudsele väärtusele saame integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ täpse väärtuse. Selle jääkliikme hindamiseks kasutatakse järgmist valemit.

Kui M on funktsiooni teise tuletise absoluutväärtuse maksimumväärtus lõigul [a; b], $M = \max\limits_{a\le x\le b} |f''(x)|$, siis

$$R_n \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

NÄIDE 3.43. Trapetsvalemi jääkliikme hindamine

Leiame jääkliikme hinnangu integraali $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ arvutamisel trapetsvalemi abil, kui $n = 10$.

Arvestades, et $f(x) = \frac{1}{x}$, leiame teise tuletise avaldise: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ja $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Vahemikus [1;2] on vastav maksimumväärtus $|f''(1)| = 2$. Arvestades, et $M = 2$, $a = 1$, $b = 2$ ja $n = 10$, saame jääkliikme hinnanguks

$$R_n \le \frac{2(2-1)^3}{12\cdot 10^2} \approx 0{,}00167$$

See tähendab, et viga, mille me teeme, kasutades integraali $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ arvutamisel trapetsvalemit $n = 10$ korral, ei ole suurem kui 0,00167. Näites 3.42 leidsime trapetsvalemi abil, et $\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx 0{,}693771$ ja integreerimist kasutades , et $\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx 0{,}693147$. Viga $|0{,}693147 - 0{,}693771| = 0{,}000624 < 0{,}00167$.

Kasutades jääkliikme hindamise valemit, on võimalik otsutada, kui mitut osalõiku ehk sammu on vaja trapetsvalemi korral kasutada, et saada etteantud täpsusega tulemus.

NÄIDE 3.44. Osalõikude arvu määramine trapetsvalemi korral.

Leiame, kui mitmeks osaks on vaja intervall [1; 2] jagada, et trapetsvalemi kasutamisel integraali $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ arvutamisel oleks viga väiksem kui 0,00005.

Eelmises näites 3.43 leidsime, et $M=2$, $a=1$ ja $b=2$. Jääkliikme hindamise valemist

$$R_n \le \frac{2(2-1)^3}{12\cdot n^2} = \frac{1}{6n^2}$$

Seega n jaoks peab kehtima tingimus

$$\frac{1}{6n^2} < 0{,}00005$$

$$n^2 > \frac{1}{6\cdot 0{,}00005}$$

$$n > \sqrt{\frac{1}{6\cdot 0{,}00005}} \approx 57{,}74$$

Väikseim täisarv, mis seda tingimust rahuldab, on 58. Seega antud täpsuse saavutamiseks tuleb vahemik jagada 58-ks sammuks.

ÜLESANDED

3.74 Leida määratud integraal, kasutades trapetsvalemit.

a) $\int_1^2 x^2 dx;\ n=4$ b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx;\ n=4$ c) $\int_{-1}^0 \sqrt{1+x^2}dx;\ n=4$

d) $\int_0^1 e^{-x^2}dx;\ n=4$ e) $\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{x}}dx;\ n=10$ f) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx;\ n=4$

3.75* Leida, mitut osalõiku on vaja trapetsvalemi kasutamisel, et viga oleks väiksem kui 0,00005

a) $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$ b) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int_{1,2}^{2,4} e^x dx$

3.76 Rallisõitjate spidomeeter oli rikkis ja näitas vaid kiirust, ei näidanud aga läbitud teepikkust. Et hinnata, mitu kilomeetrit nad läbisid kella 12.00 ja 13.00 vahel, märkis kõrvalistuja üles auto kiiruse iga 5 minuti järel.

Minutid peale kella 12.00	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Kiirus, km/h	72	77	69	62	88	96	96	88	80	107	93	72	78

Kasutades trapetsvalemit, hinnata selle aja jooskul rallisõitjate poolt läbitud teepikkus.

3.77 Tabelis on toodud Hiina rahvusliku kogutoodangu (RKT) juurdekasv ajavahemikul 1979 – 1992 (miljardites dollarites)

1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
38	39	20	42	51	72	63	41	55	54	19	28	35	12

a) Leida keskmine juurdekasv aastas, kasutades trapetsvalemit.
b) Leida keskmine juurdekasv aastas, kasutades aritmeetilist keskmist.

VASTUSED

3.74 a) 2,344; $R_4 \le 0{,}0104$; b) 0,7828; $R_4 \le 0{,}0104$; c) 1,1515; $R_4 \le 0{,}0052$ d) 0,7430; $R_4 \le 0{,}0104$ e) 0,899074; $R_{10} \le 0{,}00015$ f) 0,2045; $R_4 \le 0{,}005$. **3.75** a) 164; b) 36; c) 179 **3.76** 83,6 km **3.77** a) 41,8 mlrd \$ aastas; b) 40,6 mlrd \$ aastas.

4. DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Diferentsiaalvõrrandi mõiste

Diferentsiaalvõrrand on võrrand, milles otsitavaks on funktsioon $y\,(x)$ ning mis seob seda funktsiooni tema tuletistega $y^{/}$, $y^{//}$, ..., $y^{(n)}$ ning argumendiga x. Üldiselt tähistatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$F(x, y, y^{/}, y^{//}, ... y^{(n)}) = 0$$

Diferentsiaalvõrrandi järk on diferentsiaalvõrrandis esinevate tuletiste kõrgeim järk.
Diferentsiaalvõrrandi aste on võrrandis esineva kõrgeimat järku tuletise kõrgeim aste.

- $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5$, $\frac{dP}{dt} = kP$ — I järku, 1. astme diferentsiaalvõrrandid
- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 5x^5 = 0$ — I järku, 4. astme diferentsiaalvõrrand
- $y^{//} + y = 4e^x$ — II järku, 1. astme diferentsiaalvõrrand
- $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^7 + \left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)^5 = 75y$ — III järku, 5.astme diferentsiaalvõrrand

Lihtsaim diferentsiaalvõrrand on kujul

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

kus otsitava funktsiooni $y(x)$ tuletis on antud ilmutatud funktsioonina argumendist x. Selle võrrandi lahendamiseks tuleb lihtsalt leida määramata integraal funktsioonist $g(x)$:

$$y(x) = \int g(x)\,dx$$

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand

Diferentsiaalvõrrandit tüüpi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

nimetatakse **eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks**, kuna selle lahendamiseks saab muutujad eraldada (teine teisel pool võrdusmärki) ja seejärel integreerida:

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$
$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

NÄIDE 4.1. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine. Lahendada võrrand $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$.

Lahendamiseks eraldame muutujad

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{xy}$$
$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}\sqrt{y} \quad \Big|\cdot\ \frac{dx}{\sqrt{y}}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=\sqrt{x}\,dx$$

ja siis integreerime

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int\sqrt{x}\,dx$$
$$2y^{1/2}=\frac{2}{3}x^{3/2}+c$$

Lõpuks ilmutame otsitava funktsiooni y

$$y=\left(\frac{1}{3}x^{3/2}+c_1\right)^2,\ \text{kus}\ c_1=\frac{c}{2}$$

Olgu suuruse $Q(t)$ kasvamise kiirus võrdeline selle suurusega:

$$\frac{dQ}{dt}=kQ$$

Lahendame vastava eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{dQ}{Q}=k\,dt$$
$$\int\frac{dQ}{Q}=\int k\,dt$$
$$\ln Q=kt+c$$
$$Q=e^{kt+c}=e^{C}e^{kt}$$
$$Q=c_1e^{kt};\qquad \text{kus}\ c_1=e^{c}$$

Tähistades $Q_0=Q(0)$, saame et $Q_0=c_1e^0=c_1$ ning lahendiks on funktsioon kujul

$$Q(t)=Q_0e^{kt}$$

Eksponentsiaalne kasv ja kahanemine

Suurus $Q(t)$ kasvab (kahaneb) eksponentsiaalselt, kui selle kiirus on võrdeline suuruse väärtusega Q:

$$\frac{dQ}{dt}=kQ$$

(kui $k>0$, on tegemist kasvamisega, kui $k<0$, kahanemisega). Sellisel juhul kirjeldab suuruse Q sõltuvust ajast **eksponentsiaalne mudel**

$$Q(t)=Q_0e^{kt}$$

kus $Q_0=Q(0)$.

Olgu meil p hüvise hind ja $S(p)$ ning $D(p)$ vastavalt pakkumis ning nõudlufunktsioonid. **Evansi hinna korrigeerimise mudel** on dünaamiline mudel, kus hind, pakkumine ja nõudlus sõltuvad ajast. Hinna muutumise kiirus on võrdeline nõutava koguse ja pakutava koguse vahega:

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S) \ ,$$

kus k on positiivne konstant. Vaatleme üht konkreetset näidet selle mudeli kohta.

NÄIDE 4.2. Hinnakorrektsioon

Olgu meil nii nõudlusfunktsioon kui pakkumisfunktsioon lineaarsed, $D(p) = 8 - 2p$ ja $S(p) = 2 + p$ ja olgu hinna muutumise kiirus võrdeline, nõudluse ja pakkumise vahega, $\frac{dp}{dt} = k(D - S)$

Leiame hinna sõltuvuse ajast, kui $p(0) = 5$ ja $p(2) = 3$

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S) = k[(8 - 2p) - (2 + p)] = k(6 - 3p)$$

Peale muutujate eraldamist võime võrrandi mõlemaid pooli integreerida:

$$\int \frac{dp}{6 - 3p} = \int k\,dt$$

$$-\frac{1}{3}\ln|6 - 3p| = kt + c_1$$

$$3\ln|6 - 3p| = -3kt - 3c_1$$

$$6 - 3p = e^{-3kt - 3c_1} = e^{-3kt}e^{-3c_1}$$

$$6 - 3p = ce^{-3kt}, \quad \text{kus } c = e^{-3c_1}$$

$$p = 2 - \frac{1}{3}ce^{-3kt}$$

Järgmisena määrame konstandi väärtuse, arvestades et $p(0) = 5$

$$5 = 2 - \frac{1}{3}ce^{0}$$

$$5 = 2 - \frac{1}{3}c$$

$$c = -9$$

Asetades konstandi väärtuse hinna avaldissse, saame $p(t) = 2 + 3e^{-3kt}$.

Järgmisena on vaja määrata konstandi k väärtus. Arvestades, et $p(2) = 3$:

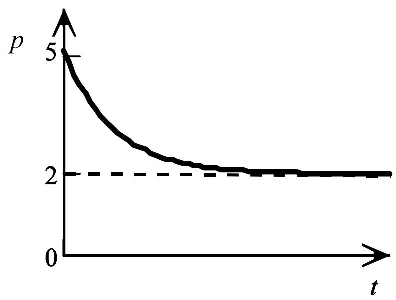
$$3 = 2 + 3e^{-3k\cdot 2}$$

$$3 = 2 + 3e^{-6k}$$

$$e^{-6k} = \frac{1}{3}$$

$$-6k = \ln\frac{1}{3}$$

$$k = \frac{\ln\frac{1}{3}}{-6} \approx 0{,}1831$$



Joonis 27 Hinna korrektsioon

Järelikult hinna sõltuvus ajast on $p(t) = 2 + 3e^{-1{,}0986t}$.

Järgmisena uurime, mis juhrub hinnaga piiramatu aja jooksul, kui $t \to \infty$. Arvestades, et $\lim_{t\to\infty} e^{-1{,}0986t} = 0$, saame, et $\lim_{t\to\infty} p = 2$.

Kui asetame selle väärtuse nõudluse ja pakkumise funktsioonidesse, näeme, et tegemist on tasakaalu hinnaga: nõudlus ja pakkumine on sellise hinna korral võrdsed :

$$D(2) = 8 - 2\cdot 2 = 4$$
$$S(2) = 2 + 2 = 4$$

Järelikult küllalt pika aja jooksul läheneb hind turu tasakaaluhinnale.

ÜLESANDED

4.1 Lahendada järgmised diferentsiaalvõrrandid

a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x - 6$ b) $\frac{dy}{dx} = 3y$ c) $\frac{dy}{dx} = e^y$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ e) $\frac{dy}{dt} = \frac{-5t}{y}$ f) $\frac{dy}{dt} = \frac{t^5}{y^4}$

4.2 Lahendada järgmised diferentsiaalvõrrandid

a) $x^2 dy - y^2 dx = 0$ b) $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$ c) $(x+5)dy - (y+9)dx = 0$

d) $dy = 3x^2 y dx$ e) $y^2(x^3+1)dy + x^2(y^3-5)dx = 0$

4.3 Olgu nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid lineaarsed, $D(p) = a - bp$ ja $S(p) = r + sp$, kus p on hind ning a, b, r, ja s positiivsed konstandid. Lisaks eeldame, et hind sõltub ajast t ning hinna muutumise kiirus on võrdeline nõudluse ja pakkumise vahega, $\frac{dp}{dt} = k(D - S)$.

a) Leida hinna sõltuvus ajast $p(t)$.

b) Uurida, mis juhtub hinnaga piiramatu aja jooksul, kui $t \to \infty$.

4.4 Olgu I rahvatulu ja D riigivõlg ning sõltugu mõlemad ajast t. Majandusteadlane Evsey Domar, kes uuris riigivõla modelleerimist, märkis, et mõlema suuruse muutumise kiirus on võrdeline rahvatuluga, s.t. $\frac{dD}{dt} = aI$ ja $\frac{dI}{dt} = bI$.

a) Lahenda mõlemad diferentsiaalvõrrandid ning esita suurused $D(t)$ ja $I(t)$ suuruste a, b, $I_0 = I(0)$ ja $D_0 = D(0)$ kaudu.

b) Domar uuris, milline on riigivõla ja rahvatulu suhe $\frac{D(t)}{I(t)}$. Leia, mis juhtub selle suhtega piiramatu aja jooksul, kui $t \to \infty$.

VASTUSED

4.1 a) $y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + c$; b) $y = ce^{3x}$; c) $y = -\ln(c - x)$; d) $y = \sqrt{x^2 + c}$; e) $y = \sqrt{c - 5t^2}$, f) $y = \sqrt[5]{\frac{5}{6}t^6 + c}$. **4.2** a) $y = \frac{x}{1 + xc}$; b) $y = \frac{c}{x}$, c) $y = c(x+5) - 9$; d) $y = ce^{x^3}$ e) $y = \sqrt[3]{\frac{c}{x^3+1} + 5}$ **4.4** a) $D(t) = \frac{aI_0}{b}(e^{bt} - 1) + D_0$, $I(t) = I_0 e^{bt}$; b) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{D(t)}{I(t)} = \frac{a}{b}$.

Diferentsiaalvõrrandi üld- ja erilahend

Diferentsiaalvõrrandi $F(x, y, y') = 0$ **lahendiks** nimetatakse funktsiooni $y = y(x)$, mille asetamisel võrrandisse tekib samasus.

Näiteks võrrandi $y' = 12y$ lahendiks on $y = e^{12x}$, sest asetades viimase vastavasse võrrandisse, saame

$$y' = 12y$$
$$(e^{12x})' = 12e^{12x}$$
$$12e^{12x} = 12e^{12x}$$

.

Aga selle võrrandi lahendiks on ka $y = e^{12x+c}$, kus c on suvaline konstant:

$$y' = 12y$$
$$(e^{12x+c})' = 12e^{12x+c}$$
$$12e^{12x+c} = 12e^{12x+c}$$

Nagu selgub, võib diferentsiaalvõrrandil olla lõpmata palju lahendeid.

Diferentsiaalvõrrandi $F(x,y,y')=0$ **üldlahendiks** nimetatakse funktsiooni $y=\varphi(x,c)$, kus c on suvaline kontant, mille korral on täidetud järgmised tingimused
1) iga c korral rahuldab $y=\varphi(x,c)$ võrrandit $F(x,y,y')=0$;
2) iga algtingimuse $y(x_0)=y_0$ korral leidub c, nii et $y_0=\varphi(x_0,c)$

Diferentsiaalvõrrandi $F(x,y,y')=0$ **erilahendiks** nimetatakse funktsiooni $y=y(x)$,mis saadakse üldlahendist $y=\varphi(x,c)$ konstandi c fikseerimisel.

NÄIDE 4.3. Diferentsiaalvõrrandi erilahend
Esimest järku võrrandi

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

üldlahendiks on funktsioonide parv $y=\frac{c}{x}$, mida võib kontrollida asendamise teel.

Leiame erilahendi, mis rahuldab algtingimust $y(2)=1$. Asetades algtingimusele vastavad väärtused $x_0=2$ ja $y_0=1$ üldlahendisse, saame määrata konstandi:

$$1=\frac{c}{2}$$
$$c=2$$

Üldlahendi geomeetriliseks tõlgenduseks on koordinaattasandil asetsev jooneparv, mis sõltub ühest suvalisest kontandist. Erilahendile vastab selle parve üks joon, see mis läbib algtingimustele vastavat punkti.

ÜLESANDED
4.5 Leida järgmiste diferentsiaalvõrrandite üldlahend. Kontrollida saadud lahendit.

a) $\frac{dy}{dx}=x^3-3x^2+5$ b) $\frac{dy}{dx}=0{,}02xy$ c) $\frac{dy}{dx}=k(80-y)$

d) $\frac{dy}{dx}=y(1-y)$ e) $\frac{dy}{dx}=e^{2x-y}$ f) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{9+x^2}}$

4.6 Leida järgmiste diferentsiaalvõrrandite erilahend, mis rahuldab lisatud algtingimust

a) $\frac{dy}{dx}=5x^4-3x^2-2$ ning $y(1)=4$ b) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$ ning $y(0)=2$

c) $\frac{dy}{dx}=e^{x+2y}$ ning $y(0)=\ln 2$ d) $\frac{dy}{dx}=x\sqrt{y^2-9}$ ning $y(-1)=4$

e) $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln x}{y}$ ning $y(1)=100$ f) $\frac{d^2y}{dx^2}=2$ ning y=5 ja $\frac{dy}{dx}=3$, kui x=0

VASTUSED

4.5 a) $y=\frac{1}{4}x^4-x^3+5x+c$; b) $y=ce^{0{,}01x^2}$; c) $y=-ce^{-kx}+80$; d) $y=\frac{1}{1+ce^{-x}}$; e) $y=\ln\left(\frac{1}{2}(e^{2x}+c)\right)$; f) $y=c(x+\sqrt{9+x^2})$

4.6 a) $y=x^5-x^3-2x+6$; b) $y=2e^{1-\sqrt{1-x^2}}$; c) $\frac{1}{2}\ln(-2e^x+6)$; d) $\ln|y+\sqrt{y^2-9}|=\frac{x^2}{2}+1{,}39$; e) $y=\sqrt{2(x\ln x-x+5001)}$; f) $y=x^2+3x+5$.

5. LÕPMATUD READ

Rida on avaldis, mis koosneb lõpmatust jadast liidetavatest, rea liikmetest:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{i-1} + a_i + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Rea esimese n liikme summat nimetatakse **rea n-ndaks osasummaks**

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Vaatleme osasummasid s_n ja suurendame arvu n:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
....
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Kui arvu n suurendada lõpmatult, siis osasummad s_n võivad kas kasvada lõpmatult või läheneda mingile arvule.
Näiteks lõpmatu perioodilise kümnendmurru 0,3333.... võib esitada reana

$$0,333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

On aga teada, et selle lõpmatu rea summa on arv $\frac{1}{3}$.

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

siis seda nimetatakse **rea summaks** ja öeldakse, et **rida koondub**

Kui piirväärtust ei eksisteeri, siis **rida hajub** ja tal puudub summa.

Järelikult rea koonduvuse või hajuvuse kindlakstegemiseks on vaja leida avaldis n-nda osasumma s_n leidmiseks ja siis leida selle avaldise piirväärtus $n \to \infty$.

NÄIDE 5.1. Rea koonduvuse uurimine
Uurime rea

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

koonduvust. Osasumma

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^{n-1}} + \frac{3}{10^n}$$

Korrutame võrduse mõlemaid pooli teguriga $\frac{1}{10}$:

$$\frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \frac{3}{10^{n+1}}$$

Lahutame nüüd esimesest võrdusest teise. Selle tulemusel paremal pool enamik rea liikmetest koonduvad, jäävad alles vaid kaks:

$$\frac{9}{10}s_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}} = \frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \quad \Big| \cdot \frac{10}{9}$$

$$s_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Leiame saadud osasumma avaldise piirväärtuse

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3}$$

Järelikult

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i} = \frac{1}{3}$$

mida oligi oodata.

Eelmises näites toodud rea korral oli kahe järjestikuse rea liikme suhe konstante ja võrdus $\frac{1}{10}$. Sellist rida nimetatakse geomeetriliseks reaks.

Geomeetriliseks reaks nimetatakse rida, mille iga liikme ja temale eelneva liikme suhe q on konstantne:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ \ldots \ = \frac{a_i}{a_{i-1}} = \ \ldots \ = q \quad .$$

Geomeetrilise rea üldkuju on

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \ldots$$

kus $q \neq 0$.

Geomeetriline rida koondub, kui $|q| < 1$. Selle näitamiseks teeme läbi näites 5.1 toodud arvutused üldjuhul

Osasumma avaldises

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

korrutame mõleamd pooled läbi teguriga q

$$qs_n = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n$$

Lahutame nüüd esimesest võrdusest teise:

$$(1-q)s_n = a(1-q^n) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

Viimane avaldis on tuntud geomeetrilise rea esimese *n* liikme summa.

1. Kui $|q|<1$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ja

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right] = \frac{a}{1-q}$$

Rida koondub

2. Kui $|q|>1$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ ja , $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, rida hajub.

3. Kui $q=1$, siis real on kuju

$$a+a+a+\ldots$$

Sel juhul $s_n = na$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, rida hajub.

4. Kui $q=-1$, siis real on kuju

$$a-a+a-a+\ldots$$

ja osasumma

$$s_n = \begin{cases} 0, \text{ kui } n \text{ on paarisarv}, \\ a, \text{ kui } n \text{ on paaritu arv}. \end{cases}$$

Osasummal piirväärtus puudub, järelikult rida hajub.

Geomeetriline rida $\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i$ koondub, kui $|q|<1$ ja rea summa on

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}.$$

Kui $|q| \geq 1$, siis rida hajub.

NÄIDE 5.2. Geomeetrilise rea koonduvus

Leida rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3}{7^n}$ summa.

Kirjutame rea üldliikme välja nii, et saaks määrata, mis on *a* ja mis on *q*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{7}\right)^n$$

Nüüd on näha, et $a = 3$ ja $q = \frac{1}{7} < 1$ ning võime kasutada rea summa leidmise valemit $\frac{a}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{7}} = \frac{21}{6}$.

Vastus: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{7^n} = \frac{21}{6}$.

NÄIDE 5.3. Geomeetrilise rea koonduvus

Leida rea $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ summa.

Kuna rea summa valemis algab summeerimisindeks nullist, tuleb minna üle uuele summeerimisindeksile i, nii et i=0, kui n=1. Järelikult peab i=n-1 ja n=i+1 ning kirjutame rea ümber uue summeerimisindeksi i abil:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^i$$

Nüüd on näha, et $a = \frac{2}{5}$ ja $q = \frac{2}{5} < 1$ ning võime kasutada rea summa leidmise valemit $\frac{a}{1-q} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$.

Vastus: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{2}{3}$.

NÄIDE 5.4. Geomeetrilise rea koonduvus

Oletame, et keskmiselt 90% rahvatulust läheb tarbimiseks ja 10% suunatakse säästudeks. Kui palju suureneb tarbimine, kui maksukoormust vähendatakse 40 miljoni krooni võrra ja tarbimiskalduvused jäävad samaks?

Esmane tarbimise suurenemine on $0{,}9 \cdot 40$ miljonit krooni. Kuna aga see omakorda suurendab sissetulekuid, siis teisene tarbimise suurenemine on $0{,}9 \cdot (0{,}9 \cdot 40) = 0{,}9^2 \cdot 40$ miljonit krooni. See omakorda suurendab sissetulekuid ja nii edasi kuni lõpmatuseni. Lõplik tarbimise suurenemine on

$$0{,}9 \cdot 40 + 0{,}9^2 \cdot 40 + 0{,}9^3 \cdot 40 + ... = 0{,}9 \cdot 40(1 + 0{,}9 + 0{,}9^2 + ...) = 36\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}9^n = 36 \cdot \frac{1}{1-0{,}9} = 360.$$

Vastus: Tarbimine suureneb 360 miljoni krooni võrra.

Perpetuiteet.

Leiame sellise investeeringu olevikuväärtuse, mis toob piiramatu aja jooksul igal aastal sisse summa S. Olgu aastane intressimäär r. Siis iga i -nda aasta jaoks on vaja investeerida summa k_i:

1. aastal $\quad S = k_1(1+r) \qquad k_1 = \frac{S}{(1+r)}$

2. aastal $\quad S = k_2(1+r)^2 \qquad k_2 = \frac{S}{(1+r)^2}$

....

i-ndal aaastal $\quad S = k_i(1+r)^i \qquad k_i = \frac{S}{(1+r)^i}$

Et väljamaksed kestaksid piiramatu aja, peab investeeringu olevikuväätus olema summa

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^{\infty} S\left(\frac{1}{1+r}\right)^i$$

Et saaksime kasutada lõpmatu rea summa valemit, peab meil summeerimine algama väärtusest 0. Selleks läheme summeerimisindeksilt i üle indeksile $j = i - 1$

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S}{1+r}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S}{1+r}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{j}$$

Kuna intressimäär on alati positiivne, siis $\frac{1}{1+r} < 1$. Kasutame lõpmatu geomeetrilise rea summa valemit, kus tegur $\frac{1}{1+r} = q$:

$$k = \frac{S}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{S}{1+r} \cdot \frac{1+r}{r} = \frac{S}{r}$$

Perpetuiteedi olevikuväärtuse arvutamiseks saime sama valemi, mis intresside pideva juurdearvestuse korral (lk 2.35).

Perpetuiteedi olevikuväärtus leitakse valemist

$$k = \frac{S}{r}$$

kus S on iga-aastase makse suurus ja r aastane intressimäär.

Olevikuväärtuse leidmisel nimetatakse intressimäära r ka **diskontomääraks**.

NÄIDE 5.5. Perpetuiteedi olevikuväärtus
Rikas sugulane Austraaliast soovib sulle pärandada summa, mis tooks piiramatu aja jooksul igal aastal sisse 25 000 krooni. Kui diskontomäär on konstantselt 10% aastas, kui suur peaks pärandus olema.
Päranduse suuruse leidmiseks kasutame perpetuiteedi olevikuväärtuse arvutamise valemit

$$k = \frac{S}{r} = \frac{25000}{0{,}1} = 250\,000$$

Vastus: Päranduse suurus peaks olema 250 tuhat krooni.

ÜLESANDED
5.1 Kirjutada järgmised summad, kasutades summeerimise sümbolit Σ.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$ b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$ c) $\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{9}{4} - \frac{16}{5} + \ldots$

5.2 Kontrollida, kas rida koondub, ja koondumise korral leida rea summa.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{(-4)^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot 0{,}9^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+2}}$

5.3 Kui tarbimiseks kulutatakse 92% sissetulekust, kui palju suurendab tarbimist maksukoormuse vähendamine 50 miljoni krooni võrra?
5.4 Kui tarbimiseks kulutatakse 90% sissetulekutest ja valitsus soovib tarbimist suurendada 720 milj krooni võrra, kui palju tuleks maksukoormust vähendada?
5.5 Ludvig kavatseb kindlustada oma tulevikku. Kui ta soovib, et peale pensionile jäämist makstakse talle (või surma korral tema pärijatele) igal aastal 36 tuh krooni ja arvestada võib 5%-lise diskontomääraga, milline summa peaks pensionile jäädes olema panka kogunenud? Kui ta praegu on 30-aastane ja pensionile kavatseb jääda 65-aastaselt, kui palju tuleks tal aastas panka paigutada?
5.6 AS Kasvik kvatseb maksta järgnevatel aastatel iga aktsia pealt dividende 200 kr aastas. Kui aktsiate tulumääraks prognoositakse 15% aastas, milline peaks olema aktsia hind?
5.7 Näidata, et kui perpetuideedi makse ei ole konstantne, vaid kasvab igal aastal protsendimäära p võrra, kusjuures

kasvamisemäär on väksem kui diskontomäär, $p<r$, siis sellise muutuva perpetuideedi olevikuväärtuse saab leida valemist $k=\dfrac{S}{r-p}$, kus S on perpetuiteedimakse esimesel aastal.

5.8 Enda ja oma järglaste tuleviku kindlustamisel arvestab Ludvig inflatsiooniga ja soovib, et esimesel aastal peale pensionile jäämist makstakse talle 36 tuh krooni ja igal järgmisel aastal makse suureneb 1,5%. Aastaseks diskontomääraks arvestab Ludvig 5%. Kui suur summa peaks sellisel juhul pensionile jäädes pangas olema? Nõuanne: kasutada eelmises ülesandes toodud valemit.

5.9 *) Kreeka filosoof Zenon Eleast (495 – 435 e.m.a.) formuleeris hulgaliselt paradokse, nende seas ka nn "Jooksja paradoksi": "Jooksja ei suuda iialgi distantsi läbida. Kui ta on läbinud poole distantsist, jääb tal veel läbida pool. Kui ta sellest läbimata jäänud distatnsist läbib poole, jääb tal sellest veel pool läbida, ja nii edasi". Kasutades lõpmatut rida, näidata, et kui jooksja kiirus on konstantne ja esimese poole distantsi läbimiseks kulunud aeg on T, siis kogu distantsi läbimiseks kuluv aeg on $2T$.

VASTUSED

5.1 a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n+1}$ **5.2** a) 5; b) 3; c) rida hajub; d) $\frac{3}{20}$; e) 45; f) $\frac{3}{16}$ **5.3** 575 milj kr **5.4** 80 milj kr **5.5** 720 tuh. krooni; 7972 kr **5.6** 1333,33 kr **5.8** 1,029 milj kr

TERMINID

SISUKORD