Tallinna Pedagoogikaülikool
Matemaatika-loodusteaduskond
Teoreetilise füüsika õppetool

Ako Sauga

Lainevõrrandite retardeeritud Greeni funktsioonid nõrga gravitatsioonivälja foonil

Magistritöö

Juhendaja: prof. R.Mankin

Autor: 2001
Juhendaja: 2001

Tallinn 2001

Sisukord

Sissejuhatus

1. Uurimuse üldteoreetiline taust ja aktuaalsus

Teist järku lineaarsed hüperboolset tüüpi osatutetistega diferentsiaalvõrrandid leiavad rakendust erinevates füüsika valdkondades, kus uuritakse lainete levikuga seotud nähtusi. On üldteada, et mittehomogeenses keskkonnas levivaid laineid kirjeldavat matemaatilist mudelit võib vaadelda lainena, mis levib kõvera aegruumi foonil. Seega on mittehomogeenses keskkonnas ja gravitatsioonivälja foonil toimuvad laineprotsessid käsitletavad ühtsetel matemaatilistel alustel. Nimetatud võrrandite fundamentaallahendite (Greeni funktsioonide) teooria alusepanijaks võib lugeda J. Hadamardi [1]. 1960.a. analüüsisid DeWitt ja Brehme skalaarse laine ja elektromagnetlaine võrrandeid kõveras aegruumis ning leidsid, et mõlema võrrandi Greeni funktsioon koosneb kahest osast: singulaarsest, mille kandjaks on valguskoonus, ja regulaarsest osast, mille kandjaks on lisaks valguskoonusele ka koonuse sisemus [2]. Regulaarse osa eksisteerimise füüsikaline tähendus seisneb selles, et lisaks lainele, mis levib teatud kindla, keskkonnast sõltuva karakteristliku kiirusega, võib esineda ka sellest väiksema kiirusega leviv laine, mida nimetatakse lainesabaks. 1968.a. tõestasid Kundt ja Newman [3], et kahemõõtmelisel juhul on hüperboolse osatuletistega diferentsiaalvõrrandil lainesabade esinemine pigem reegel kui erand. Seda järeldust laiendasid neljamõõtmelisele juhule erinevat tüüpi konformselt invariantsete lainevõrrandite jaoks McLenaghan ja Carminati [4 - 6].

Hüperboolsete differentsiaalvõrrandite matemaatilist teooriat on edasi arendatud mitmetes hiljem ilmunud monograafiates. 1975.a. avaldatud Friedlanderi raamatus [7] kasutatakse kõveras ruumis lainevõrrandite fundamentaallahendite leidmiseks üldistatud funktsioone. Huygensi printsiipi kui lainesabade kadumist vaatlevad põhjalikult Schimming [8] ja Günther [9].

Kovariantse lainevõrrandi fundamentaallahendid omavad tähtsust ka füüsikaliste rakenduste seisukohalt. DeWitt ja Brehme [2] näitasid, et elektromagnetvälja sabaliige mängib olulist rolli laetud osakese liikumisvõrrandite tuletamisel kõveras aegruumis. 1997.a. uurisid Mino, Sasaki ja Tanaka massiga osakese liikumisvõrrandeid kõveras aegruumis ja leidsid, et lainesabad põhjustavad gravitatsioonilise pidurduskiirguse [10]. Samale tulemusele jõudsid ka Quinn ja Wald [11].

Gravitatsiooniväljast põhjustatud mõju lainete levikule tuleb esmajoones esile tugevas gravitatsiooniväljas, mis reaalselt eksisteerib ülitihedate astrofüüsikaliste objektide läheduses. Seepärast on lainesabade uurimine oluline neutrontähe ja musta augu kiirguse analüüsimisel. On teada, et "mustal augul pole juukseid": musta augu kollapseerumisel väline väli läheb üle Kerr-Newmani väljaks, mida iseloomustavad vaid mass, elektrilaeng ja impulssmoment. Price analüüsis seda protsessi ning leidis, et välised väljad kiiratakse ära, kiirgamisel aga toimub lainete peegeldumine musta augu gravitatsiooniväljalt ning tekkinud lainesabad mõjutavad kollapseerumist [12]. Seda protsessi on edasi uuritud töödes [13 - 17]. Hod ja Piran [18] vaatlesid analoogset kiirgusprotsessi elektriliselt laetud ning Hod [19 - 23] pöörleva musta augu korral. Selgus, et nii laeng kui ka pöörlemine aeglustavad kiirgussabade vaibumist. Hiljuti ilmunud töös [24] uurisid Koyama ja Tomimatsu massiga skalaarse välja levimist musta augu gravitatsiooniväljas ning seda, kuidas lainesaba sõltub skalaarse välja massist.

Teine huvipakkuv valdkond on kauge vaatlejani jõudva kiirguse uurimine. Tugev gravitatsiooniväli mõjutab laineallika poolt kiiratud teravat impulssi, nii et allikast kaugel asetsev vaatleja näeb lisaks temani jõudvale impulsile ka mõningase aja pärast järgnevat saba. Sellise efekti eksperimentaalse registreerimise võimalikkust ja selle abil pulsarite eristamist käsitles 1970. aastal Roe [25]. Mankin, Laas ja Tammelo on hiljuti ilmunud töödes [26, 27] kasutanud elektromagnetkiirguse sabaliikme leidmiseks kõrgemat järku Greeni funktsioone ja saadud tulemuste rakendamisel kompaktsele astrofüüsikalisele kaksiksüsteemile näidanud, et teatud tingimustel võib lainesaba energia olla eksperimentaalseks registreerimiseks piisavalt suur. Lainefrondi ja saba intensiivsuse võrdlemine võimaldab saada täiendavat informatsiooni kaksiktähe füüsikaliste omaduste (mass, kaksikute vaheline kaugus, orbitaaltasandi orientatsioon) kohta.

Lähitulevikus on oodata kompaktsetest kaksiksüsteemidest pärinevate gravitatsioonilainete detekteerimist vastavate interferomeetritega. Gravitatsioonilainete eksperimentaalsel registreerimisel tuleb kasulik signaal eraldada mürast ja seepärast on oluline korraliku lainemudeli leidmine, arvestades ka lainesabasid.. Couch jt [28] näitasid 1968. aastal, et isoleeritud allika poolt kiiratud gravitatsioonilaine peegeldub allikaid ümbritseva aegruumi kõveruselt osaliselt tagasi ning tekib sisenev laine. 1992.a. leidsid Blanchet ja Damour [30], et ajahetkel t ei sõltu gravitatsioonilained mitte ainult allika olekust vastaval retardeeritud ajahetkel $t-r/c$ (r on ruumiline kaugus allikani, c valguse kiirus), vaid ka allika olekust enne retardeeritud aega. See kinnitab, et kõveras aegruumis toimub lainete levimine kiirusega $v \leq c$. Nad näitasid ka, et lainesabad mängivad olulist rolli gravitatsioonilainete kiirgamisel kompaktsete astro-füüsikaliste kaksiksüsteemide poolt ning see mõju peaks olema eksperimentaalselt mõõdetav vastavate gravitatsioonilainete detektorite abil nagu LIGO (*American Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory)* ja Prantsuse -Itaalia VIRGO. Gravitatsioonilainete sabade mõju on edasi uuritud töödes [31 - 34]. Bonnor ja Piper [35] on võrrelnud gravitatsioonilise kvadrupolkiirguse korral tagasipeegeldunud laine energiat väljunud laine energiaga ja näidanud, et teatud tingimustel võib peegeldunud laine energia olla küllalt suur ning põhjustada gravitatsioonikiirguse märgatavat sumbumist.

Eespool toodud näited lainesabade esinemisest astrofüüsikas käsitlevad kompaktseid gravi-tatsioonivälja allikaid. Kosmoloogiliste mudelite korral on aga tegemist olukorraga, kus aegruumi kõveruse allikat tuleb vaadelda globaalsena ning lainete peegeldumine toimub kõikjal ruumis. Arvutused muudab komplitseeritumaks võimalus, et teatud mudelite korral võib laine läbida mingit ruumipiirkonda rohkem kui üks kord. Lainesabade esinemist kosmoloogiliste mudelite korral on vaadelnud Faraoni, kes rõhutab selle efekti uurimise olulisust erinevate mudelite analüüsimisel [36,37].

Kosmilise mikrolainelise taustakiirguse sõltuvust lainesabadest on uurinud Mohanty ja Prasanna [38, 39], kes lähtusid elektromagnetlaine võrrandist skalaarsete häiritustega Robertson-Walkeri universumis ning näitasid, et häiritused põhjustavad kosmilise mikrolainekiirguse ringpolarisatsiooni. Kuid häirituste poolt põhjustatud anisotroopia on väga väike, võrreldes muudest põhjustest tingitud anisotroopiaga, ning autorite arvates on seda eksperimentaalselt raske avastada.

Kui aegruumi kõverusraadius on samas suurusjärgus mittegravitatsioonilise välja Comptoni lainepikkusega, tuleb väljade kvantiseerimisel arvestada gravitatsioonilisi efekte. Sel juhul on kvantväljateooria suuruste (nt Feynmani propagaator, energia-impulss tensori vaakumi keskväärtus, vaakumi energia) tuletamisel võimalik kasutada klassikalise lainevõrrandi Greeni funktsioone. Greeni funktsiooni käitumine isoleeritud aegruumipunktide jaoks sisaldab informatsiooni selliste elementaarprotsesside kohta nagu osakeste paaride tekkimine [40 - 46]. Superväljateoorias võib aga näiteks bosonstringi liikumisvõrrandit käsitleda kui lainevõrrandit kahemõõtmelise gravitatsioonivälja foonil skalaarse välja jaoks [47].

Kovariantse lainevõrrandi abil on võimalik uurida ka lainete levikut mittehomogeenses keskkonnas. Ching jt on näidanud, et lainevõrrand, mis kirjeldab elektromagnetlaine levimist ruumipunktist sõltuva dieletekrilise läbitavusega keskkonnas, on teisendatav Klein-Gordoni võrrandiks kõveras ruumis [15]. Bilic analüüsib heli levimist relativistlikus vedelikus, kasutades skalaarset lainevõrrandit kõvera geomeetria taustal, milles esinevad akustilise meetrilise tensori komponendid [48].

Arvestades lainesabade füüsikalist tähtsust on palju töid pühendatud nende struktuuri ja tekkimise tingimuste analüüsimisele. 1989.a. leidis Roberts DeWitti ja Brehme töö põhjal vabalt langeva punktmassi kiirgussaba ning näitas, et see sisaldab Weyli tensori kovariantseid tuletisi [49]. Leonard ja Poisson [50] uurisid, kuidas lainesabad sõltuvad kiirguse tüübist. Nad vaatlesid skalaarse, elektromagnetilise ja lineaarse gravitatsioonikiirguse multipolmomente nõrgas Schwarzschildi väljas väikeste kiiruste korral ning näitasid, et kõigi kolme kiirgusliigi korral on sabaliikme struktuur ühesugune. Mankin, Laas ja Tammelo üldistasid nende tulemust elektromagnetvälja korral ning näitasid, et see kehtib suvalises nõrgas gravitatsiooniväljas ilma piiranguteta laineallika kiirusele [27].

Huygensi printsiibi kehtivuse tingimuste tuletamiseks on kasutatud mitmeid erinevaid meetodeid. McLenaghan ja Carminati tõestasid, et teatud klassi meetrikate korral kehtib Huygensi printsiip vaid siis, kui meetrika on konformselt invariantne tasalainet kirjeldava meetrikaga. Günther on analüüsinud seda printsiipi Maxwelli võrrandite korral [51, 52], Piir nõrgas Schwarzschildi väljas [54], Mankin skalaarse lainevõrrandi jaoks suvalises nõrgas gravitatsiooniväljas [55]. Kokkuvõtlikult on Huygensi printsiipi käsitlenud Schimming [8] ja Günther [9] oma monograafiates. Bombelli ja Sonego vaatlesid eraldi lainevõrrandi selliseid omadusi nagu Huygensi printsiip, lainesaba puudumine ja lainete levimine piki karakteristikuid ning uurisid nende omaduste ekvivalentsust erinevate lainevõrrandite korral [56].

Lainesaba tekkimise põhjused võiks jagada kolmeks. Seda, et Klein-Gordoni võrrandi lahendil 4-mõõtmelises Minkowski ruumis esineb sabaliige juhul kui mass on nullist erinev, võib tõlgendada kui massiivsete osakeste liikumist valguse kiirusest väiksema kiirusega. Teatud juhtudel sõltub sabaliikme olemasolu lainevõrrandi dimensioonist. Näiteks massita Klein-Gordoni võrrandi korral n-mõõtmelises Minkowski ruumis esineb sabaliige juhul kui n on paaritu arv või kui n=2 [1, 57]. Füüsikaliselt kõige huvipakkuvam põhjus on aga lainesaba tekkimine tänu lainete peegeldumisele aegruumi kõveruselt [12, 36].

Lainevõrrandi fundamentaallahendi täpne leidmine on küllaltki keeruline ja seda on tehtud vaid teatud spetsiifiliste meetrikate jaoks. De Sitteri universumi jaoks tõi täpse lahendi ära Friedlander [7], Bianchi I tüüpi meetrika korral Nariai [58], Ainsaar ja Mankin teatava klassi Robertson-Walkeri meetrikate korral [59] ning kokkutõmbuva aegruumi meetrika korral Kumar [60]. Mankin, Tammelo ja Laas on välja töötanud algoritmi, mis võimaldab leida skalaarse ja tensorlainevõrrandi täpset lahendit kõrgemat järku Greeni funktsioonide kaudu [61 - 64].

Olulist informatsiooni lainesabade struktuuri ja omaduste kohta on võimalik saada aga ka erinevaid lähendusmeetodeid kasutades. Hadamardi meetodi korral arendatakse sabaliige ritta maailmafunktsiooni σ astmete järgi ja astmerea kordajad leitakse teatud rekurentsetest seostest [1, 7]. Seda tehnikat on mitmete lainevõrrandite jaoks kasutanud DeWitt [2], Günther [9], John [65, 44] ja teised. Selline protseduur õigustab ennast valguskoonuse lähedal, kus $\sigma \to 0$. Seejuures pole vajalik eeldada, et gravitatsiooniväli on nõrk. Näiteks kvantväljateoorias kasutatakse regulariseerimisel lähestikku asuvate punktide Greeni funktsioone ja nimetatud meetod on sobiv [66, 67]. Väljade interaktsiooni korral, kus on vaatluse all mittelokaalsed efektid, tuleb aga kasutada muid lähendusmeetodeid.

Üks võimalik meetod on meetrilise tensori rittaarendus väikese parameetri ε järgi, nii et suurus ε iseloomustab gravitatsioonivälja kõrvalekallet mingist taustameetrikast. Enamikel juhtudel on taustaks Minkowski meetrika, st eeldatakse, et gravitatsiooniväli on nõrk. Kui on teada aga Greeni funktsiooni täpne avaldis mõne Minkowski meetrikast erineva meetrika korral, võib taustaks võtta ka selle (näiteks häiritus Einsteini või de Sitteri universumis). Nõrga gravitatsioonivälja lähendust on erinevate autorite poolt kasutatud elektromagnetvälja [68], skalaarse välja [54, 55, 69 - 71] ja vektorvälja [69, 72] lainevõrrandi fundamentaallahendi analüüsimisel. John [73] on vastava lähendusmeetodi õigsust kontrollinud sel teel, et leidis Bianchi tüüpi meetrika korral skalaarse lainevõrrandi Greeni funktsiooni rittaarenduse ja näitas, et see langeb esimeses lähenduses kokku Nariai [58] poolt leitud täpse Greeni funktsiooniga. Gravitatsioonilainete analüüsimisel on taustameetrika rittaarendust kasutanud Thorne ja Kovacs [29]. Aegruumi meetrika rittaarendus on kasutusel ka antud töös.

2. Põhieesmärgid.

Käesoleva töö eesmärgiks on leida nõrga gravitatsioonivälja lähenduses avaldised kovariantse lainevõrrandi fundamentaallahendi sabaliikme jaoks vektorlaine ja Klein-Gordoni võrrandi korral ning analüüsida vastavate sabaliikmete struktuuri ja tekkimise tingimusi.

3. Uurimismetoodika

Arvutuste tegemisel tugineti Friedlanderi poolt esitatud üldistatud funktsioonide kasutamise tehnikale kovariantse lainevõrrandi funamentaallahendi uurimisel [7]. Analüüs on läbi viidud nõrga gravitatsioonivälja lähenduses, kasutades meetrika rittaarendust väikese parameetri järgi.

4. Eeldatav tähtsus

Töö tulemused võivad omada tähtsust kompaktsetelt astrofüüsikalistelt objektidelt saabuva kiirguse analüüsimisel, samuti ka vaatlustulemuste tõlgendamisel mittehomogeenses keskkonnas levivate lainete puhul.

5. Sisu lühikirjeldus

Töö koosneb kolmest peatükist. Esimeses on antud ülevaade metoodikast, mida kasutatakse lainevõrrandi fundamentaallahendi leidmisel ning vastavad lähtevõrrandid. Teises peatükis on vaadeldud nõrga gravitatsioonivälja lähendust ning toodud ära aegruumi meetrikast sõltuvate suuruste rittaarendused. Kolmas peatükk on jagatud kaheks osaks, milles esimeses tuuakse ära ülevaade artiklis [74] avaldatud vektorlaine fundamentaallahendi ning teises osas Klein-Gordoni võrrandi fundamentaallahendi analüüsist [75].

Lõpus on kokkuvõte olulisematest tulemustest, kirjanduse loetelu ja inglisekeelne resümee. Publikatsioonid on toodud lisas. Tulemused on ette kantud kahel konverentsil ning lisatud on ka vastavates kogumikes avaldatud teesid [76,77].

6. Tänuavaldused

Autor tänab töö tegemisel saadud väärtuslike nõuannete eest juhendajat, Tallinna Pedagoogikaülikooli teoreetilise füüsika professorit Romi Mankinit.

1. Lainevõrrandi fundamentaallahend

4-mõõtmelises kõveras aegruumis, milleks on pseudo-Riemanni ruum V^4 signatuuriga (+,-,-,-), kirjeldab skalaarse laine $u(x)$ levikut kovariantne lainevõrrand

$$\hat{L}u(x) := \Box u(x) + a^a(x)\nabla_a u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad , \tag{1}$$

kus d'Alembertiaan $\Box = g^{ab}(x)\nabla_a\nabla_b$, suurus $g^{ab}(x)$ on aegruumi meetriline tensor ja ∇_a tähistab kovariantset tuletist ruumis V^4. Suurused $a^a(x)$ ja $c(x)$ kirjeldavad vastavalt etteantud vektorvälja ja skalaarset välja ning omavad mistahes järku pidevaid tuletisi, st kuuluvad klassi $C^\infty(\Omega)$. Suurus $f(x)$ on üldiselt distributsioon ja kirjeldab laineallikat.

Lainevõrrandi fundamentaallahendi konstrueerimist saab üldjuhul teostada vaid kausaalses piirkonnas $\Omega \subseteq V^4$, kuna on vaja, et eksisteeriks üks ja ainult üks geodeetiline joon, mis ühendab punkte x ja y. Piirkonda Ω nimetatakse kausaalseks, kui leidub geodeetiliselt kumer piirkond Ω_0, nii et $\Omega \subset \Omega_0$ ning kõigi piirkonda Ω kuuluvate punktipaaride x ja y korral on $J^+(y) \cap J^-(x)$ hulga Ω alamhulk või tühi. Siin $J^+(y)$ tähistab punktist y lähtuvat tuleviku valguskoonust $C^+(y)$ koos sisemusega $D^+(y)$: $J^+(y) = C^+(y) \cup D^+(y)$, ja $J^-(x)$ on sama punktist x lähtuva minevikukoonuse jaoks: $J^-(x) = C^-(x) \cup D^-(x)$. Võrrandi (1) lineaarsuse tõttu on võimalik konstrueerida lahendit ka kõikjal ruumis, kasutades superpositsiooni printsiipi [2].

Piirkonnas Ω omab lainevõrrand (1) kahte fundamentaallahendit, milleks on distributsioonid G^+ ja G^- ning mis rahuldavad diferentsiaalvõrrandit

$$\hat{L}G^\pm(x,y) = \delta^4(x,y) \quad ,$$

kus $\delta^4(x,y)$ on Diraci punktdistributsioon ruumis V^4: iga $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ jaoks kehtib $(\delta^4(x,y), \varphi(x)) = \varphi(y)$. Retardeeritud fundamentaallahend G^+ kirjeldab punktallika poolt punktis y kiiratud lainet ja avanseeritud fundamentaalalhend G^- punkti y sissetulevat lainet.

Fundamenaallalendite $G^{\pm}$ konstrueerimisel võib lähtuda Friedlanderi monograafias [7] toodud metoodikast. Selle järgi saab fundamentaallahendi esitada singulaarse osa ja regulaarse osa summana:

$$G^{\pm}(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left(W(x,y)\,\delta^{\pm}(\sigma(x,y)) + V^{\pm}(x,y)\right) \ .$$

Suurus $\sigma(x,y)$, mida nimetatakse maailmafunktsiooniks, on ½ punktide x ja y vahelise geodeetilise kauguse ruudust. Ruumisarnaste intervallide korral on σ negatiivne, ajasarnaste intervallide korral positiivne ja rahuldab võrrandit

$$\nabla^{i}\sigma\nabla_{i}\sigma = 2\sigma.$$

Delta distributioonide $\delta^{\pm}(\sigma(x,y))$ kandjateks on vastavalt tuleviku valguskoonus $C^{+}(y)$ ja mineviku valguskoonus $C^{-}(y)$. Need koonused on siis vastavalt ka fundamentaallahendite $G^{\pm}(x,y)$ singulaarse osa kandjateks.

Transportskaalar $W(x,y)$ rahuldab võrrandit

$$\begin{gathered}(2\nabla^{i}\sigma\nabla_{i} + (\Box\sigma + a^{i}\nabla_{i}\sigma - 4))\,W(x,y) = 0\ , \quad \forall x,y \in \Omega, \\ W(y,y) = 1 \ .\end{gathered} \tag{2}$$

Friedlander [7] on näidanud, et funktsiooni $W(x,y)$ jaoks võib võrrandist (2) saada avaldise

$$W(x,y) = \sqrt{\varrho}\exp\left\{\int_{0}^{1} a_{r}(z(\lambda))\,\dot{z}^{r}\,d\lambda\right\} \ . \tag{3}$$

Siin λ on afiinne parameeter, mis muutub piki geodeetilist joont $\widehat{yx}$, nii et $z(0) = y$ ja $z(1) = x$ ning tuletise märkimisel selle parameetri järgi kasutame tähistust $\dot{z}^{r} := \dfrac{dz^{r}}{d\lambda}$.

Biskalaari ϱ nimetatakse van Vlecki determinandiks ja selle võib avaldada kujul

$$\varrho(x,y) = \frac{\left|\det\left(\dfrac{\partial^{2}\sigma}{\partial x^{a}\,\partial y^{i}}\right)\right|}{|g(x)\,g(y)|^{\frac{1}{2}}} \ , \tag{4}$$

kus $g(x)$ ja $g(y)$ on meetrilise tensori determinandid vastavates punktides.

Fundamentaallahendite regulaarsed osad $V^{\pm}$(x,y), mida nimetatakse ka sabaliikmeteks, omavad kandjat piirkondades $J^{\pm}(y)$. Valguskoonuste sees piirkondades $D^{\pm}(y)$ peavad funktsioonid $V^{\pm}$ rahuldama homogeenset diferentsiaalvõrrandit

$$\hat{L}\,V^{\pm}(x,y) = 0 \ , \tag{5}$$

koos ääretingimustega

$$\begin{aligned} \hat{P}V^{\pm}(x,y) := (2\nabla^i\sigma\nabla_i + (\Box\sigma + a^i\nabla_i\sigma - 2))V^{\pm}(x,y) = -\hat{L}W(x,y), \\ \forall\ x \in C^{\pm}(y). \end{aligned} \tag{6}$$

Regulaarse osa leidmisel on aga võimalik kasutada ka integraalvõrrandit, mis retardeeritud osa jaoks omab kuju [7 lk.200]

$$V^{+}(x,y) + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_y} V^{+}(x,z)\,\hat{L}\,W(z,y)\,\mu_x(z) = -\frac{1}{4\pi}\int_S W(x,z)\,\hat{L}\,W(z,y)\,\omega(z)\ . \tag{7}$$

Leray vorm $\mu_x(z)$ ja 2-vorm $\omega(z)$ on defineeritud järgmise seose abil:

$$d\sigma(z,x) \wedge \mu_x(z) = d\sigma(z,y) \wedge d\sigma(z,x) \wedge \omega(z) = \mu(z)$$

kus $\mu(z)$ on invariantne ruumielement. Kasutatakse järgmisi tähistusi:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &:= J^{-}(x) \cap J^{+}(y)\ , & \Sigma_y &:= J^{-}(x) \cap C^{+}(y)\ , \\ \Sigma_x &:= C^{-}(x) \cap J^{+}(y)\ , & S &:= C^{-}(x) \cap C^{+}(y)\ . \end{aligned}$$

Märgime, et $\partial\Omega_0 = \Sigma_x \cup \Sigma_y$ ja pind $S = \partial\Sigma_x = \partial\Sigma_y$.

Järgmisena toome ära fundamentaallahendite struktuuri vektorvälja korral. Kovariantne lainevõrrand vektorvälja $u_a(x)$ jaoks omab kuju

$$\hat{\boldsymbol{L}}u_a(x) := g^{bc}\nabla_b\nabla_c u_a + a_a^{bc}\nabla_c u_b + b_a^{\ b} u_b = J_a(x)\ , \tag{8}$$

kus tensorväljad $a_a^{bc}(x)$, $b_a^{\;b}(x)$ kuuluvad klassi $C^\infty(\Omega)$ ning laineallikat kirjeldav $J_a(x)$ võib üldjuhul olla distributsioon.

Vektorlainevõrrandi fundamentaallahendi leidmisel kasutatatakse bitensoreid, mis sõltuvad kahest punktist. Erinevatele punktidele vastavate indeksite eristamiseks kasutatakse allpool järgmist süsteemi: indeksid a, b, ...h tähistavad bitensori komponente punkti x järgi, indeksid i, j, ...n punkti y ja r, s, ... punkti z järgi.

Vektorlainevõrrandi (8) fundamentaallahendid $G^{\pm}{}_a{}^{i}$ rahuldavad võrrandit

$$\hat{\boldsymbol{L}}\, G^{\pm}{}_a{}^{i}(x,y) = g_a^{\;i}(x,y)\;\delta^4(x,y) \;\; .$$

Suurus $g_a^{\;i}(x,y)$ on piki geodeetilist $\widehat{yx}$ toimuva paralleelse transpordi tensor ja rahuldab diferentsiaalvõrrandeid

$$\nabla^a \sigma(x,y)\nabla_a g_b^{\;i}(x,y) = 0 \;\; , \qquad g_a^{\;i}(x,y)\,|_{x=y} = \delta_a^i \;\; , \tag{9}$$

kus $\left(g_a^{\;i}(x,y)\,\delta^4(x,y)\,,\,\xi^a(x)\right) = \xi^i(y)$ iga $\xi^a(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ korral.

Nii nagu skalaarsel juhul, koosnevad ka vektorlainevõrrandi fundamentaallahendid singulaarsest ja regulaarsest osast:

$$G^{\pm}{}_a{}^{i}(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left(W_a^{\;i}(x,y)\;\delta^{\pm}(\sigma(x,y)) + V^{\pm}{}_a{}^{i}(x,y)\right) \;\; .$$

Bitensor $W_a^{\;i}$ rahuldab transportvõrrandit [7 lk 211]

$$\begin{gathered}(2\sigma^{;a}\nabla_a \;+ (\Box\sigma - 4))\, W_b^{\;i}(x,y) \;+ a_b^{cd}\sigma_{;d} W_c^{\;i}(x,y) = 0 \;, \quad \forall x,y \in \Omega, \\ W_b^{\;i}(y,y) = \delta_b^i \;\; .\end{gathered} \tag{10}$$

Analoogselt skalaarse juhuga, kus regulaarse osa jaoks oli võimalik kirja panna integraalvõrrand (7), saab ka vektorlainevõrrandi sabaliikme jaoks kasutada vastavat integraalavaldist:

$$\overset{+}{V}{}_a^{\ i}(x,y) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_y} \overset{+}{V}{}_a^{\ r}(x,z)\,\hat{\boldsymbol{L}}\,W_r^{\ i}(z,y)\;\mu_x(z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S} W_a^{\ r}(x,z)\,\hat{\boldsymbol{L}}\,W_r^{\ i}(z,y)\,\omega(z)\ . \tag{11}$$

Arvutused on tehtud vaid retardeeritud fundamentaallahendite puhul, kuna vastavad tulemused avansseeritud fundamentaallahendite jaoks on võimalik saada aja orientatsiooni muutmisega piirkonnas Ω. Seepärast jäetakse edaspidi ära tähistus "±".

2. Nõrga gravitatsioonivälja lähendus

Lainevõrrandite fundamentaallahendite sabaliikmete leidmisel eeldame, et gravitatsiooniväli on nõrk ja kasutame meetrilise tensori rittaarendust väikese parameetri ε järgi:

$$\begin{aligned} g_{ab}(x) &= \underset{0}{g}_{ab}(x) + \varepsilon\gamma_{ab}(x) + 0(\varepsilon^2) \ , \\ g^{ab}(x) &= \underset{0}{g}^{ab}(x) - \varepsilon\gamma^{ab}(x) + 0(\varepsilon^2) \ , \end{aligned} \tag{12}$$

kus $\gamma^{ab} = \underset{0}{g}^{ac}\underset{0}{g}^{bd}\gamma_{cd}$. Parameeter ε iseloomustab meetrilise tensori kõrvalekaldumist tasase aegruumi meetrilisest tensorist $\underset{0}{g}_{ab}$. Siin ja edaspidi tähistab indeks 0 tasase aegruumi suurusi.

Kõik suurused, mis sõltuvad meetrilisest tensorist, on samuti ritta arendatud parameetri ε järgi ja arvutustes piirdume arenduse esimese lähendusega. Toome ära maailmafunktsiooni ja transporttensori rittaarendused:

$$\begin{aligned} \sigma(x,y) &= \underset{0}{\sigma}(x,y) + \varepsilon\underset{1}{\sigma}(x,y) + 0(\varepsilon^2) \ , \\ g_a^{\ i}(x,y) &= \underset{0}{g}_a^{\ i}(x,y) + \varepsilon\underset{1}{g}_a^{\ i}(x,y) + 0(\varepsilon^2) \ . \end{aligned}$$

Nõrga välja lähenduse korral eeldatakse ka, et lainevõrrandites (1) ja (8) esinevad kordajad on esimest järku väikesed suurused:

$$a^{a}(x) = \varepsilon\underset{1}{a}^{a}(x) + 0(\varepsilon^2) \ , \qquad c(x) = \varepsilon\underset{1}{c}(x) + 0(\varepsilon^2) \ , \tag{13}$$

$$a_a^{\ bc}(x) = \varepsilon\underset{1}{a}_a^{\ bc}(x) + 0(\varepsilon^2) \ , \qquad b_a^{\ b}(x) = \varepsilon\underset{1}{b}_a^{\ b}(x) + 0(\varepsilon^2) \ . \tag{14}$$

Järgmistes arvutustes on kasutatud Lorentzi koordinaatsüsteemi, kus

$$\underset{0}{g}_{ab} = \eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \ . \tag{15}$$

Arvestades aga, et tegemist on tensoravaldistega, võime me saadud avaldisi kasutada kõigis koordinaatsüsteemides, kus meetrika jaoks kehtib arendus (12).

Arendades ritta transporttensori jaoks kehtiva diferentsiaalvõrrandite süsteemi (9) ja võttes arvesse, et tasase aegruumi meetrika (15) korral $\underset{0}{g}{}_a{}^i(x,y) = \delta_a^i$ ja Christoffeli koefitsiendid on nullid, $\underset{0}{\Gamma}{}^a{}_{bc} = 0$, saame transporttensori esimest järku väikese liikme jaoks järgmise integraali:

$$\underset{1}{g}{}_a{}^i(x,y) = \int_0^1 \left[\!\left[\underset{0}{g}{}_a{}^r \underset{0}{g}{}_s{}^i \underset{1}{\Gamma}{}^s{}_{rt} \dot{z}^t \right]\!\right] d\lambda \ .$$

Siin oleme integraali all olevate suuruste sõltuvust piki tasase aegruumi geodeetilist joont muutuva parameetri λ järgi märkinud järgmiselt: $[\![f]\!] := f(z(\lambda))$.

Christoffeli koefitsientide esimest järku väikesed liikmed $\underset{1}{\Gamma}{}^s{}_{rt}$ on tensori komponendid tasase-aegruumi meetrika suhtes ja leitakse meetrilise tensori rittaarenduse esimest järku liikmete kaudu:

$$\underset{1}{\Gamma}{}^s{}_{rt} = \frac{1}{2}\left(\gamma^s_{(r;t)} - \gamma_{rt}{}^{;s}\right) .$$

Valemite kompaktsuse huvides kasutatakse sümbolit ";" kovariantse tuletise tähistamiseks vastava koordinaadi järgi, $f_{;i} := \nabla_i f$, ja ümarsulgudes olevad indeksid tähistavad sümmetriseerimist: $A_{(ab)} = A_{ab} + A_{ba}$.

Võttes vektorlainevõrrandis $a_a{}^{bc} = 0$, saame, et $W_a{}^i = g_a{}^i W$, kus W on ruutjuur van Vlecki determinandist (4). Kui aga kehtib rittaarendus (14), saadakse $W_a{}^i$ jaoks järgmine avaldis [74]:

$$W_a{}^i(x,y) = g_a{}^i + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\!\left[\underset{0}{g}{}_a{}^r \underset{0}{g}{}_s{}^i \dot{z}^t \left(\delta_r^s \lambda(1-\lambda) R_{tu} \dot{z}^u - a_r{}^s{}_t\right) \right]\!\right] d\lambda \ .$$

Viimane valem on kehtiv esimest järku lähenduse täpsusega.

Nõrga gravitatsioonivälja (12) korral on Ricci tensor R_{ab} esimest järku väike,

$$R_{ab} = \varepsilon \underset{1}{R}_{ab} + 0\,(\varepsilon^2) \;\; ,$$

kus suurused $\underset{1}{R}_{ab}$ avalduvad meetrilise tensori rittaarenduse esimest järku liikmete kaudu:

$$\underset{1}{R}_{ab} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{\;\;c}_{[a;c]b} + \gamma_{b[c}{}^{;c}{}_{;a]}\right) \; .$$

Kandilistes sulgudes olevad indeksite järgi toimub antisümmetriseerimine, $A_{[ab]} = A_{ab} - A_{ba}$.

3. Lainesaba struktuur nõrga gravitatsioonivälja foonil

3.1. Vektorväli

Tasase aegruumi korral vektorlainevõrrandi (8) fundamentaallahendil regulaarne osa ehk sabaliige puudub, mis tähendab, et Huygensi printsiip on rahuldatud. Nõrga gravitatsioonivälja korral, kui meetrika on ritta arendatud, arendame parameetri ε järgi ritta ka sabaliikme:

$$\overset{+}{V}{}_a{}^i(x,y) = \varepsilon \underset{1}{\overset{+}{V}}{}_a{}^i(x,y) + 0(\varepsilon^2) \ .$$

Võttes arvesse arendust (14) ja avaldist (3), on võimalik näidata, et esimest järku lähenduse täpsusega taandub sabaliikme integraalvõrrand (11) järgmiseks integraaliks [74] :

$$\varepsilon \underset{1}{\overset{+}{V}}{}_a{}^i(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\int_S g_a{}^{\bar{r}}(x,\bar{z})\, \hat{\boldsymbol{L}} W_{\bar{r}}{}^i(\bar{z},y)\ \omega(\bar{z}) + 0(\varepsilon^2) \ , \tag{16}$$

kus $x \in D^+(y)$ ja $\bar{z} \in S$. Töös [74] on leitud integraalis (16) olev suurus $\hat{\boldsymbol{L}} W_{\bar{r}}{}^i(\bar{z},y)$ ja saadud esimest järku lähenduse täpsusega integraalavaldis sabaliikme $\overset{+}{V}{}_a{}^i$ jaoks:

$$\overset{+}{V}{}_a{}^i(x,y) = -\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{1}{\sigma(x,y)}\int_\Sigma g_a{}^r g^{is}(A_{rst}+B_{rst})\, d\Sigma^t(z) + \int_S g_a{}^{\bar{r}} g^{i\bar{s}} C_{\bar{r}\bar{s}}\ \omega(\bar{z})\right\} \ , \tag{17}$$

kus $x \in D^+(y)$. Siin kasutatakse järgmisi tähistusi:

$$A_{rst} = g_{rs}(z)\ \sigma^{;u}(z,y)\,\frac{\sigma(z,x)}{\sigma(x,y)}\left(R_{tu\ ;v}{}^{;v} - \frac{1}{3}R_{;ut}\right) \ , \tag{18}$$

$$B_{rst} = 2R_{t[r;s]} + a_{rs[u}{}^{;u}{}_{;t]} \ , \tag{19}$$

$$C_{rs} = \frac{1}{3} g_{rs} R - a_{rst}{}^{;t} + 2b_{rs} \ , \tag{20}$$

kus R on skalaarne kõverus. Pinna Σ pinnaelement $d\Sigma_r$ on defineeritud järgmiselt:

$$d\Sigma_r(z) = \frac{1}{6}\sqrt{-g(z)}\ \varepsilon_{rstu} dz^s \wedge dz^t \wedge dz^u \ ,$$

kus ε_{rstu} on diskriminanttensori komponendid, nii et $\varepsilon_{1234} = 1$.

Asetades avaldised (18) – (20) valemisse (17) on sabaliikme jaoks saadud ka järgmine avaldis

$$
\begin{aligned}
\overset{+}{V}{}_a{}^i(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\Bigg\{ & g_a{}^i \left(\frac{1}{\sigma(x,y)} \int_\Sigma g_r{}^b\, G^{rs}\, d\Sigma_s(z) \right)_{;b} + \\
& + \frac{1}{2} \int_S g_a{}^{\bar r} g^{i\bar s} \left(2 R_{[\bar r}{}^{\bar t} D_{\bar s]\bar t} + R D_{\bar r \bar s} + a_{\bar r \bar s}{}^{\bar t ; \bar u} D_{\bar t \bar u} + a_{\bar r \bar s \bar t}{}^{;\bar t} - 2 b_{\bar r}{}^{\bar s} \right) \omega(\bar z) \Bigg\} ,
\end{aligned} \tag{21}
$$

kus

$$
D_{rs} = \frac{\sigma_{[;r}(z,x)\, \sigma_{;s]}(z,y)}{\sigma(x,y)}
$$

ja G^{rs} on Einsteini tensori komponendid, $G^{rs} = R^{rs} - \frac{1}{2} g^{rs} R$. Lorentzi koordinaadistiku (15) korral langeb valem (21) kokku töös [72] toodud valemiga.

Toome siinkohal ära mõned olulised tulemused, mis on saadud avaldisi (17) – (21) analüüsides.

1. Sabaliige $\overset{+}{V}{}_a{}^i(x,y) = 0$ iga $x \in \Omega$ ja $y \in \Omega$ jaoks, kui differentsiaalvõrrandi (8) kordajad rahuldavad järgmisi tingimusi (esimeses lähenduses):

$$
R_{ab;c}{}^{;c} - \frac{1}{6} g_{ab} R_{;c}{}^{;c} - \frac{1}{3} R_{;ab} = 0 \ , \tag{22}
$$

$$
2 R_{a[b;c]} + a_{bc[d}{}^{;d}{}_{;a]} = 0 \ , \tag{23}
$$

$$
\frac{1}{3} g_{ab} R - a_{abc}{}^{;c} + 2 b_{ab} = 0 \ , \qquad \forall x \in \Omega \ . \tag{24}
$$

Kasutades avaldist (21), on võimalik näidata, et (22) - (24) on samal ajal ka vajalikud tingimused sabaliikme kadumiseks.

Kui lainevõrrandis (8) on välise välja allikaks elektromagnetväli, siis $a_a{}^{bc} = 0$ ja $b_a{}^b = -R_a{}^b$. Et nüüd oleks rahuldatud tingimus (24), peab $R_a{}^b = 0$, mis on tarvilik ja piisav tingimus sabaliikme kadumiseks elektromagnetvälja korral. Saadud tulemus langeb kokku töös [51] tooduga.

2. Kui tingimused (22) - (24) ei ole rahuldatud vaid maailmatorus Γ ja piirkond $D := \{x : x \in J^+, \Sigma \cap \Gamma = \emptyset\}$ ei ole tühi, siis avaldisest (21) järeldub, et sabaliige on null iga punkti $x \in D$ korral.

3. Olgu Einsteini tensoril G_{ab} ja suurustel a_a^{bc} ning b_a^b kandjad vaid maailmatorus Γ. Kui $x \in D^*$, kus piirkond

$$D^* := \left\{ x : x \in D^+(y),\, C^+(y) \cap \Gamma \subset \Sigma,\, S \cap \Gamma = \emptyset \right\} \,, \tag{25}$$

siis avaldises (21) võrdub integraal üle pinna *S* nulliga ja sabaliige $\overset{+}{V}{}_a{}^i(x,y)$ on määratud ainult vektorväljaga

$$P^a(x) = \int_{\Sigma \cap \Gamma} g^a{}_r(x,z)\, G^{rs}(z)\, d\Sigma_s(z) \tag{26}$$

järgmiselt:

$$\overset{+}{V}{}_a{}^i(x,y) = \frac{1}{4\pi} g_a{}^i(x,y)\, (\sigma^{-1}(x,y))_{;b} P^b(x) \ .$$

Kui meetrika rahuldab Einsteini gravitatsioonivälja võrrandeid, võib vektorit $\frac{1}{8\pi\varkappa} P^a$ interpreteerida kui gravitatsioonivälja allikate energia-impulssvektorit tasases aegruumis ($\varkappa$ on gravitatsioonikonstant).

Kasutades sabaliikme jaoks saadud avaldisi, on töös [74] uuritud elektromagnetilist diipolkiirgust nõrga gravitatsioonivälja foonil. On näidatud, et kui on tegemist lõpliku ajavahemiku $t_2 - t_1$ jooksul kiiratud elektromagnetkiirguse impulsiga, siis kompaktse gravitatsioonivälja allika korral jõuab punktis *x* asuva vaatlejani algul primaarne impulss kestvusega $t_2 - t_1$ ja seejärel lainesaba. Primaarse impulsi ja lainesaba vahelise ajavahemiku, pausi, pikkus sõltub gravitatsioonivälja ja elektromagnetkiirguse allikate vahelisest suhtelisest kiirusest ning samuti allikate asukohast vaatleja suhtes. Näiteks kui gravitatsioonivälja allikas on elektromagnetkiirguse allika taga, on pausi pikkus maksimaalne, kui aga eespool, siis primaarse impulsi ja lainesaba vahel pausi pole.

3.2. Klein - Gordoni võrrand

Kui skalaarses lainevõrrandis (1) $a^a = 0$ ja $c(x) = \xi R(x) + m^2$, kus m on mass ja ξ skalaar-välja ning gravitatsioonivälja seost iseloomustav konstant, saame Klein-Gordoni võrrandi massiga skalaarse välja jaoks:

$$L\, G(x,y) := (\Box + \xi\, R(x) + m^2)\; G(x,y) = \delta^4(x,y) \ . \tag{27}$$

Tõõs [75] vaadeldakse Klein-Gordoni võrrandit nõrga gravitatsioonivälja foonil, kui kehtib arendus (12). Võrrandi (27) fundamentaallahendi sabaliiget V otsitakse kujul

$$V(x,y) = W(x,y)\, Z(\sigma(x,y)) + \varepsilon \underset{1}{V}(x,y) + 0(\varepsilon^2) \ , \tag{28}$$

kus

$$Z(\sigma) = -\frac{m}{\sqrt{2\sigma}}\, J_1(m\sqrt{2\sigma}) \tag{29}$$

ja J_1 on esimest järku Besseli funktsioon. Tasase aegruumi korral langeb funktsioon (29) kokku vastava sabaliikmega, $Z(\underset{0}{\sigma}) = \underset{0}{V}(x,y)$.

Peale võrrandite (5) ja (6) rittaarendust parameetri ε järgi saame sabaliikme $\underset{1}{V}$ jaoks järgmise karakteristlike võrrandite süsteemi:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \underset{0}{\hat{L}}\, \underset{1}{V}(x,y) = -\underset{0}{V}(x,y)\, \hat{L}_M W(x,y) \ , \qquad && x \in D^+(y) \ , \\ &\varepsilon \underset{0}{\hat{P}}\, \underset{1}{V}(x,y) = -\hat{L}_M W(x,y) \ , && x \in C^+(y) \ , \end{aligned} \tag{30}$$

kus $\hat{L}_M$ tähistab massita skalaarse välja operaatorit, $L_M := \hat{L} - m^2$. Kuna on teada Klein-Gordoni võrrandi sabaliikme kuju tasase aegruumi korral $\underset{0}{V}$, on võimalik lahendada võrrandite süsteem (30) ning $\underset{1}{V}$ saab esitada kahe liikme summana:

$$\underset{1}{V} = \underset{1}{V}' + \underset{1}{V}'' \ .$$

Integraalavaldis esimese liikme jaoks on

$$\varepsilon \underset{1}{V}' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \hat{L}_M W(z,y)\, \omega(z) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_y} \underset{0}{V}(x,z)\, \hat{L}_M W(z,y)\, \mu_y(z) \ . \tag{31}$$

ja teise liikme jaoks

$$\varepsilon \underset{1}{V}'' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_x} \underset{0}{V}(z,y)\, \hat{L}_M W(z,y)\, \mu_x(z) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \underset{0}{V}(x,z)\, \underset{0}{V}(z,y)\, \hat{L}_M W(z,y)\, \mu(z). \tag{32}$$

Analüüsides valemeid (28) - (32), on näha, et kui $m = 0$, siis $\underset{1}{V}''$ ja teine integraal $\underset{1}{V}'$ avaldises on nullid. Järelikult esimene integraal $\underset{1}{V}''$ avaldises (31) kirjeldab massita skalaarse välja sabaliiget. Saadud tulemus langeb kokku töös [55] toodud integraaliga.

Klein-Gordoni võrrandi sabaliikme jaoks saadud integraalavaldisi on töös [75] analüüsitud staatilise gravitatsioonivälja puhul, mille korral aeg-ruumi meetriline vorm on kujul

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \ . \tag{33}$$

Kreeka tähtedega tähistatud indeksid omandavad väärtusi 1 kuni 3 ja $g_{\alpha\beta}$ sõltub vaid ruumikoordinaatidest x^α.

Juhul kui kosmoloogiline konstant Λ võetakse võrdseks nulliga, siis meetrika (33) ei kirjelda reaalset gravitatsioonivälja, mis peab rahuldama Einsteini väljavõrrandeid. Kuid saadud tulemusi võib kasutada väljaspool gravitatsioonivälja konteksti, näiteks lainete levikul mittehomogeenses keskkonnas.

On tõestatud järgmine teoreem: Kui pseudo-Riemanni ruumi V^4 meetrika on kujul (33) ja punktid $x, y \in \Omega$, võib Klein-Gordoni sabaliikme esitada järgmiselt:

$$V(x,y) = W\,Z(\sigma) + V_M(x,y) + \int_0^\sigma [\![V_M(x,y)]\!]\, Z(\sigma - s)\, ds \ , \tag{34}$$

kus $[\![V(x,y)]\!] \equiv V(x,y)_{|\,\sigma = s}$ ja $V_M(x,y)$ on massita skalaarse välja fundamentaallahendi sabaliige. Selline esitusviis lihtsutab sabaliikme analüüsi, kuna massita välja korral on fundamentaallahendi sabaliige V_M üldiselt lihtsama struktuuriga. Kui V_M on teada meetrikaga (33) konformse meetrika jaoks, siis saab sellist lähenemist kasutada konformselt invariantse lainevõrrandi (1) korral (kui $\xi = -\frac{1}{6}$). Samuti on võimalik seost (34) kasutada nõrga gravitatsioonivälja lähenduses.

Järgnevalt ongi töös [75] vaadeldud nõrka staatilist gravitatsioonivälja meetrikaga

$$ds^2 = (1 + 2\Psi(\vec{r}))[dx^{0\,2} - (1 - 4\Psi(\vec{r}))\, d\vec{r}^{\,2}] \ . \tag{35}$$

Siin $d\vec{r}^{\,2}$ on Eukleidilise 3-ruumi meetriline vorm ja $\Psi(\vec{r})$ Newtoni potentsiaal, mis rahuldab võrrandit

$$\Delta\Psi(\vec{r}) = 4\pi\varkappa\rho(\vec{r}) \ ,$$

kus ρ on gravitatsioonivälja allika massitihedus ja Δ tähistab 3-ruumi Laplace'i operaatorit. Arenduses võetakse arvesse vaid liikmed, mis on võrdelised gravitatsioonikonstandi $\varkappa$ esimese astmega.

Kasutades meetrikaga (35) konformset meetrikat

$$d\tilde{s}^2 = (dx^0)^2 - (1 - 4\Psi(\vec{r}))\, d\vec{r}^{\,2} \ ,$$

on näidatud, et sabaliige V on avaldatav summana

$$V(x,y) = W\,Z(\sigma) + V^*(x,y) \ ,$$

kus esimene liidetav on sarnane sabaliikmega Minkowski meetrika korral. Teise liidetava jaoks on saadud järgmine valem

$$\begin{aligned} V^*(x,y) \equiv -\frac{\xi}{4\pi}\left\{ \int_S R\,\omega + \int_0^{\sigma} \left[\!\left[\int_S R\,\omega \right]\!\right] Z(\sigma - s)\,ds \right\} + \\ +2\varkappa \left(\frac{1}{\sigma} M(\sigma,\vec{q}) \right)_{,x^0} + \\ +2\varkappa \int_0^{\sigma} \left(\frac{\sigma + q^2 + s}{s\sqrt{q^2+2s}} M(s,\vec{q}) \right)_{,s} Z(\sigma - s)\,ds \ . \end{aligned} \tag{36}$$

Koma indeksi ees tähistab osatuletist vastava koordinaadi järgi ning $\vec{q} \equiv \vec{x} - \vec{y}$. Suurus $M(\sigma,\vec{q})$ tähistab ellipsoidi Σ_y sisse jäävat massi:

$$M(\sigma,\vec{q}) \equiv \int_{\Sigma_y} \rho(\vec{x}^{\,*})\, d\Sigma_0(\vec{x}^{\,*}) \ , \tag{37}$$

kus $d\Sigma_0$ on pinna Σ_y invariantse pinnaelemendi ajasarnane komponent (vt töös [75] toodud joonist).

Märgime, et gravitatsioonivälja ja skalaarse välja minimaalse seose korral ($\xi = 0$) esimene liidetav avaldises (36) puudub. Teine liidetav langeb kokku fundamentaallahendi saba-liikmega massita skalaarse välja puhul [55] ja viimane integraal on tingitud gravitatsiooni-välja ja massiga skalaarse välja koosmõjust.

Suurusel V^* on sarnaseid omadusi sabaliikmega massita skalaarse välja juhul. Näiteks kui gravitatsioonivälja allikad on lokaliseeritud maailmatorus Γ, siis avaldistest (36), (37) järeldub, et $V^*(x,y) = 0$ iga punkti $x \in D$ korral, kus piirkond $D := \{x : x \in J^+, \Sigma_y \cap \Gamma = \varnothing\}$.

Lõpuks on töös [75] vaadeldud juhtu, kui punktide x ja y vaheline ruumisarnane intervall on oluliselt suurem maailmatoru Γ ruumisarnastest mõõtmetest ning gravitatsioonivälja allikat A

võib vaadelda ruumipunktis $P^* = (\vec{x}^*)$ asuva punktallikana. Sellisel juhul vastab piirkonnale D tingimus $0 \le q^0 < |\vec{q} - \vec{r}_0| + r_0$, kus $q^0 \equiv x^0 - y^0$ ja $\vec{r}_0 \equiv \vec{x}^* - \vec{y}$. Nüüd eksisteerib punktis $x = (x^0, \vec{x})$ sabaliige ainult siis, kui ajakoordinaat rahuldab tingimust $x^0 \ge y^0 + r_0 + |\vec{q} - \vec{r}_0|$. See tähendab, et ruumipunktis $P = (\vec{x})$ asuv vaatleja registreerib peale primaarset impulssi lainesaba, mis hilineb ajavahemiku $\Delta\tau = |\vec{q} - \vec{r}_0| + r_0 - q^0$ võrra. Analoogne tulemus elektromagnetvälja jaoks saadi töös [74] (vt ka eelmine alapeatükk). Massita skalaarse välja jaoks on sarnasele tulemusele jõutud artiklis [55].

Kui $q^0 > |\vec{q} - \vec{r}_0| + r_0$, siis piirdume vaid minimaalselt seosega gravitatsioonivälja ja skalaarse välja vahel ($\xi = 0$) .,Sellisel juhul esimene liidetav avaldises (36) puudub. Kui nüüd punkt P asub 3-ruumi piirkonnas $\sigma_1 \equiv \frac{1}{2}[(|\vec{q} - \vec{r}_0| + r_0)^2 - q^2] > 0$, siis valemitest (36)- (37) saadakse

$$V^*(x,y) = -\varkappa M q^0 \frac{m^2\sigma + 2}{\sigma^2} +$$

$$+\varkappa M m^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{\sigma + q^2 + s}{s(\sigma - s)\sqrt{q^2 + 2s}} J_2(m\sqrt{2(\sigma - s)})\, ds \; .$$

Siit on näha, et juhul $\xi = 0$ sõltub V^* piirkonnas

$$q^0 > |\vec{q} - \vec{r}_0| + r_0 \; , \qquad \sigma_1 > 0 \tag{38}$$

vaid suurustest q^0, $\vec{q}$ ja summaarsest massist M. Gravitatsioonivälja allika sisemine struktuur sellisel juhul saba ei mõjuta.

Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärgiks oli analüüsida kovariantse vektorlainevõrrandi ja Klein-Gordoni võrrandi fundamentaallahendite struktuuri nõrga gravitatsioonivälja korral. Arvutused on läbi viidud esimest järku lähenduse täpsusega.

Töös jõuti järgmiste tulemusteni.

Vektorlaine võrrand.

- Nõrga gravitatsioonivälja korral on leitud piisavad ja tarvilikud tingimused sabaliikme kadumiseks ehk Huygensi printsiibi kehtimiseks (22)-(24).

- Kui gravitatsioonivälja ja vektorvälja allikad on ruumiliselt lokaliseeritud, siis teatud aegruumi piirkonnas (25) on lainesaba määratud vaid gravitatsioonivälja allika energia ja impulsiga (26) - gravitatsioonivälja allika kõrgemad momendid saba struktuuris ei kajastu.

- Lõpliku ajavahemiku jooksul kiiratud elektromagnetkiirguse impulss jõuab kompaktse gravitatsioonivälja allika korral allikatest kaugel asuva vaatlejani kahes osas: primaarne impulss ja hilinev lainesaba, kusjuures hilinemise aeg sõltub vaid allikate suhtelisest kiirusest ning nende asukohast vaatleja suhtes.

Klein-Gordoni võrrand.

- Staatilise meetrika korral on Klein-Gordoni võrrandi sabaliige leitav massita skalaarse välja sabaliikme kaudu (34).

- Gravitatsioonivälja ja skalaarse välja minimaalse seose korral koosneb nõrgas staatilises gravitatsiooniväljas tekkiv sabaliige kahest osast, millest üks on massita skalaarse välja lainesaba ja teine väljendab gravitatsioonivälja mõju massiga skalaarse välja levikule (36).

- Kui gravitatsioonivälja allikat võib vaadelda punktallikana, siis nagu vektorvälja korralgi jõuab allikatest kaugel asuva vaatlejani peale primaarset impulssi hilinev lainesaba, kusjuures hilinemise aeg sõltub allikate asukohast vaatleja suhtes.

- Gravitatsioonivälja ja skalaarse välja minimaalse seose korral on olemas aegruumi piirkond (38), kus gravitatsioonivälja allika sisemine struktuur ei mõjuta nõrgas staatilises gravitatsiooniväljas tekkivat lainesaba.

Arvutused ja vastavad tulemused on publitseeritud artiklites [74, 75].

Kasutatud kirjandus

1. Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. New Haven: Yale University Press 1923.

2. DeWitt B.S., Brehme R.W. Radiation Damping in a Gravitational Fields. - Annals of Physics. N.Y 1960. **9.** 220-259.

3. Kundt, W, Newman, E.T. Hyperbolic differential Equations in Two Dimensions. - Journal of Math. Physics. 1968. **9**. 2193-2202.

4. McLenaghan R.G. An Explicit Determination of the Empty Space-Times on which the Wave Equation Satisfies Huygens' Principle. - Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. **65**. 139-155.

5. McLenaghan R. G. Carminati, I. Determination of all Petrov N-type space-times on which the conformally invariant scalar wave equation satisfies Huygens' principle.. - Phys. Lett. A. 1984. **105.** 351-354.

6. McLenaghan R. G. Carminati, I. The validity of Huygens principle for the conformally invariant scalar wave equation, Maxwell`s equations and Weyl`s neutrino equation on Petrov type D and type III space-times. - Phys. Lett. A. 1986. **118**. 322-324.

7. Friedlander F.G. The Wave Equation on a Curved Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

8. Schimming R. A review of Huygens' principle for linear hyperbolic differential equations. Leipzig: Karl Marx Universität. 1978.

9. Günther P. Huygens` Principle and Hyperbolic Equations. San Diego: Academic Press. 1988.

10. Mino Y., Sasaki M., Tanaka T. Gravitational radiation reaction to a particle motion. - Phys. Rev. D. 1997. **55**. 3457–3476.

11. Quinn T.C, Wald R.M. An axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved spacetime. - Phys. Rev. D. 1997. **56**. 3381-3394.

12. Price R. H. Perturbations of Relativistic Gravitational Collaps 1,2. Scalar and Gravitational Perturbations. - Phys. Rev. D. 1972. **5**. 2419-2438.

13. Leaver E. Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry. - Phys. Rev. D. 1986. **34**. 384 - 408.

14. Gundlach C., Price R.H., Pullin J. Late-Time Behavior of Stellar Collapse and Explosions: I, II - Phys. Rev. D. 1994. **49**. 883-899.

15. Ching E.S.C., Leung P.T., Suen W.M., Young K. Wave Propagation in Gravitational Systems: Late Time Behavior. - Phys. Rev. D. 1995. **52.** 2118-2132.

16. Ching E.S.C., Leung P.T., Suen W.M., Young K. Wave Propagation in Gravitational Systems: Completeness of Quasinormal Modes. - Phys. Rev. D. 1996. **54**. 3778-3791.

17. Kokkotas K. D., Schmidt B.G. Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes. - Living Rev. Rel. 1999. **2**. 2.

18. Hod S., Piran T. Late-Time Evolution of Charged Gravitational Collapse and Decay of Charged Scalar Hair - I, II.- Phys. Rev. D. 1998. **58**. 024017.

19. Hod S. Late-Time Evolution of Realistic Rotating Collapse and The No-Hair Theorem.- Phys. Rev. D. 1998. **58**. 104022.

20. Hod S. Mode-Coupling in Rotating Gravitational Collapse of a Scalar Field.- Phys. Rev. D. 2000. **61**. 024033.

21. Hod S. Mode-coupling in rotating gravitational collapse: Gravitational and electromagnetic perturbations.- Phys. Rev. D. 2000. **61**. 064018.

22. Hod S. Radiative Tail of Realistic Rotating Gravitational Collapse - Phys. Rev. Lett. 2000. **84**. 10-13.

23. Hod S. Wave Propagation in Nontrivial Backgrounds. E-print http://arXiv.org/abs/gr-qc/0008001. 2000.

24. Koyama H., Tomimatsu A. Asymptotic power-law tails of massive scalar fields in Reissner-Nordström background.- Phys. Rev. D. 2001. **63**. 064032.

25. Roe P.E. Experimental Model for distinguish Pulsar Models. - Nature. 1970. **227**. 154-156.

26. Mankin R., Laas T., Tammelo R. Electromagnetic wave tails on curved spacetime and their observational implications. - Phys. Rev. D. 2000. **62**. 041501(R).

27. Mankin R., Laas T., Tammelo R. A new approach to electromagnetic wave tails on a curved spacetime. - Phys. Rev. D. 2001. **63**. 063003.

28. Couch W. E., Torrence R.J., Janis A. I. and Newman E. T. Tail of a Gravitational Wave. - J. Math. Phys.1968. **9**. 484-496.

29. Thorne K., Kovacs J. The generation of Gravitational Waves. I. Weak-Field Sources. - Astrophys. J.. 1975. 200. 245-262.

30. Blanchet L., Damour T. Hereditary effects in gravitational radiation. - Phys. Rev. D. 1992. **46**. 4304–4319.

31. Blanchet L., Sathyaprakash B. S. Signal analysis of gravitational wave tails. - Class. Quant. Grav. 1994. **11**. 2807-2832.

32. Blanchet L.Gravitational radiation reaction and balance equations to post-Newtonian order. - Phys. Rev. D. 1997. **55**. 714–732.

33. Blanchet L. Quadrupole-quadrupole gravitational waves. - Class. Quant. Grav. 1998. **15**. 89-111.

34. Blanchet L. Gravitational-wave tails of tails. - Class. Quant. Grav. 1998. **15**. 113-141.

35. Bonnor W.B., Piper M. S. Suppression of gravitational radiation.- Class. Quant. Grav.1998. **15**. 955-963.

36. Faraoni V., Sonego S. On the tail problem in cosmology. - Phys. Lett. A. 1992. **170**. 413-420.

37. Faraoni V., Gunzig E. Tales of tails in cosmology. - Int. J. Mod. Phys. D. 1999. **8**. 177-188.

38. Mohanty S, Prasanna A.R. Photon propagation in Einstein and Higher Derivative Gravity. - Nucl. Phys. 1998. B **256**. 501-508

39. Mohanty S, Prasanna A.R. General Relativistic Contribution to Polarization of the Cosmic Microwave Background Anisotropy. - Phys. Rev. D. 2001. **63**. 027301.

40. DeWitt, B.S. Dynamical Theory of Groups and Fields. New York: Gordon and Breach, 1965.

41. DeWitt, B.S.Quantum Field Theory In Curved Space-Time. - Phys. Rept. 1975. **19**. 295-357.

42. Bekenstein J. D., Parker L. Path-integral evaluation of Feynman propagator in curved spacetime. - Phys. Rev. D. 1981. **23**. 2850-2869.

43. Birrell N.D., Davies P.C.W. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

44. John R.W. Die Hadamard-konstruction Greencher Funktionen auf gekrümmter Raum-Zeit: Physikalische Zusammenhänge und explicite strenge Resultate. - Astron. Nachr. 1987. **308**. 9-26.

45. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. 2-е изд., М.: Энергоатомиздат, 1988.

46. Takook, V.T. Covariant two point function for minimally coupled scalar field in de Sitter space-time. - E-print: http://arXiv.org/abs/gr-qc/0005020. 2000.

47. Kuusk P., Abramov V. Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas. Tartu: TTÜ Kirjastus, 1994.

48. Bilic N. Relativistic Acoustic Geometry. - Class. Quant. Grav. 1999. **16**. 3953-3964.

49. Roberts M. D. The motion of a charged particle in a spacetime with a conformal metric.- Class. Quant. Grav. 1989. **6**. 419-423.

50. Leonard S. W., Poisson E. Radiative multipole moments of integer-spin fields in curved spacetime. - Phys. Rev. D. 1997. **56**. 4789-4814.

51. Günther P. Einige Sätze über huygenssche Differentilagleichungen - Wissen. Zeitschrift der Karl-Marx-Universität: Math.- Naturwissen. 1965. **14**. 497-507.

52. Günther, P. Wüncsh W. Maxwellsche Gleichungen und Huygenssches Prinzip I. - Math. Nachr. 1974. **63**. 97-121.

53. Günther P. Über einige spezielle Probleme aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen Zweiter Ordnung. - Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. K1. 1957. **102**.50.

54. Piir I. Huygens' principle and radiation tails in a weak Schwarzchild Field. - Proc. Acad. Sci.of the Estonian SSR., Phys. Math. 1983. **32**. 29-36.

55. Mankin R. Fundamental Solution of the Wave Equation in Case of a Curved Space-Time. - Proc. Acad. Sci. of the Estonian SSR. Phys. Math. 1983. **32**. 351-358.

56. Bombelli L., Sonego S. Relationships between various characterisations of wave tails. - J.Phys. A. 1994. **27.** 7177-7199.

57. Soodak H., Tiersten M. S. Wakes and waves in N dimensions.- Am. J. Phys. 1993. **61.** 395-401.

58. Nariai H. Propagators for Scalar field in a Homeogeneous Expanding Universe. - Nuovo Cim. B. 1976. **35**. 259-267.

59. Ainsaar A., Mankin R. Green's functions for a scalar field in a class of Robertson-Walker space-times. - Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 1997. **46**. 281-289.

60. Kumar K. Üldkovariantse lainevõrrandi fundamentaallahend kokkutõmbuvas aegruumis. Diplomitöö. - Tallinn 1994.

61. Laas T., Mankin R., Tammelo R. Higher-order fundamental solutions of second order wave equations on a curved space-time. - Class. Quant. Grav. 1999. **15**. 1595-1605.

62. Mankin R., Tammelo R., Laas, T. Complete algorithms for calculating the higher-order fundamental solutions of wave equations. - Class. Quant. Grav. 1999. **16**. 1215-1225.

63. Mankin, R., Tammelo, R Laas, T. A new method for solving covariant wave equations by means of higher order fundamental solutions: proof an algorithm. - Class. Quant. Grav. 1999. **16**. 2525-2536.

64. Mankin, R., Tammelo, R, Laas, T. Exact solutions of covariant wave equations with a multipole source term on curved spacetimes. - Gen. Relativ. Gravit.1999. **31** 537

65. John R.W. The Hadamard Construction of Green's Functions on a Curved Space-Time with Symmetries. - Annalen der Physik.1987. **44**. 531-544.

66. Bernard D. Folacci A. Hadamard function, stress tensor, and de Sitter space. - Phys. Rev. D. 1986. **34**. 2286–2291.

67. Sahlmann H., Verch R. Microlocal spectrum condition and Hadamard form for vector-valued quantum fields in curved spacetime. - E-print: http://arXiv.org/abs/math-ph/0008029. 2000.

68. DeWitt, C.M., DeWitt, B.S. Falling charges.- Physics. 1964. **1.** 3-20.

69. John R.W. Darstllungsformeln erster Näherung für Greensche Funktionene von Wellengleichungen in Riemannscher Raum-Zeit. - Math. Nachr. 1974. **60**. 109-129.

70. Peters P.C. Electromagnetic Radiation from Charges in weak Gravitational Fields. - Phys. Rev. D. 1973. **7**. 368-392.

71. Mankin R., Piir I. Scalar Wave Equation in a Weak Static Gravitational Field. - Proc. Acad. Sci. of the Estonian SSR. Phys. Math. 1983. **32**. 157-164.

72. Манкин Р.Й. Фундаменталное решение векторного волновго уравнения в искривленном пространстве-времени. - Тез. докл. VI Сов. грав. конф. М.: Изд-во УДН. 1984. 136-137.

73. John R.W. The Wave Equation in a Curved Space-time: On the Consistency of the Perturbation Expansion about Minkowski Metric.- Astron. Nachr. 1980. **301**. 277-283.

74. Mankin R., Sauga A.Vector Wave Equation in a Curved Space-Time. - Transactions of the Institute of Physics of the Estonian Acad. Sci. 1989. **65**. 41-54.

75. Mankin R., Sauga A. On Retarded Green's Function for Covariant Klein-Gordon Equation. - Transactions of Tallinn Technical University. 1992. **733**. 59-70.

76. Манкин Р.Й., Саугa А.А .Запаздывающая функция Грина для электромагнитного поля в слабо искривленном пространстве - времени. - Тез. докл.VII Сов.грав.конф. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1988, С.97-98.

77. Манкин Р.Й., Саугa А.А. Функция Грина общековариантного уравнения Клейна-Гордона. - Тез. докл. междн. научн. конф. "Лобачевский и современная геометрия." Казань, 18-22. авг. 1992.г. Ч.2. Казань: А/о "У Дипол", 1992. С.39-40.

Summary

Retarded Green's functions for wave equations in a weak gravitational field

The fundamental solutions for the vector field equation and for the Klein-Gordon equation in a curved space-time are analysed. We assumed that the gravitational field is weak and a perturbational approach could be used.

The purpose of the thesis was to find the fundamental solutions for the wave equations in the first order approximation.

The following results are obtained.

Vector wave equation

- Necessary and sufficient conditions for the validity of the Huygens' principle in the first-order approximation are (22) - (24).

- For the compact sources of the gravitational and vector fields exists the space-time region (25) where the tail term is determined by the energy-momentum vector of the gravitational field sources only (26).

- When the electromagnetic pulse is generated by the dipole moment during a finite time interval, an observer receives the primary wave-pulse and after that the tail. The pause between the two pulses depends on the relative velocity between the sources and on the positions of the sources in respect to the observer.

Klein-Gordon equation

- For the static metric the tail term for the Klein-Gordon equation is simply found by means of the tail term for massless wave equation (34).
- In case of minimal coupling of the gravitational and scalar fields the tail is a sum of the two terms: first is the tail of the massless scalar field and the second describes the special action of the gravitational field on the massive field (36).

- If the point-mass approximation for the gravitational sources is applicable then an observer receives the wave-tail delayed behind the singular impulse by a time. The pause depends on the positions of the sources in respect to the observer.

- In case of minimal coupling of the gravitational and scalar fields there exists the space-time region (38), where the form of the tail term is independent on the internal structure of the gravitational source.

The results of the work are published in [74, 75] and can be used, when the radiation of the massive astrophysical objects is analysed.

Lisa: Töö tulemusi kajastavad publikatsioonid

Publikatsioonid

1. Mankin R., Sauga A.Vector Wave Equation in a Curved Space-Time. - Transactions of the Institute of Physics of the Estonian Acad. Sci. 1989. **65**. 41-54.

2. Mankin R., Sauga A. On Retarded Green's Function for Covariant Klein-Gordon Equation. - Transactions of Tallinn Technical University. 1992. **733**. 59-70.

Ettekanded konverentsidel

1. Манкин Р.Й., Саугa А.А .Запаздывающая функция Грина для электромагнитного поля в слабо искривленном пространстве - времени. - Тез. докл.VII Сов.грав.конф. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1988, С.97-98.

2. Манкин Р.Й., Сауга А.А. Функция Грина общековариантного уравнения Клейна-Гордона. - Тез. докл. междн. научн. конф. "Лобачевский и современная геометрия." Казань, 18-22. авг. 1992.г. Ч.2. Казань: А/о "У Дипол", 1992. С.39-40.